



TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

MASCHINENBAU

FAKULTÄT für

I n s t i t u t

für

Mechanik und Thermodynamik

**Modellbildung und Simulation
radial gekoppelter Rotoren**

Jörg Weiß

Bericht 1/2008

Modellbildung und Simulation radial gekoppelter Rotoren

Von der Fakultät für Maschinenbau der
Technischen Universität Chemnitz

genehmigte
Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
(Dr.-Ing.)

vorgelegt

von Dipl. Ing. Jörg Weiß
geboren am 14. November 1971 in Chemnitz

mündliche Prüfung 18. Mai 2007

Gutachter Prof. Dr.-Ing. habil. H. Dresig, TU Chemnitz
 Prof. Dr.-Ing. habil. R. Kreißig, TU Chemnitz
 Prof. Dr.-Ing. habil. H. P. Wölfel, TU Darmstadt

Dresden den 17. März 2008

Bibliographische Beschreibung

Autor: Jörg Weiß

Thema: Modellbildung und Simulation radial gekoppelter Rotoren

Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Chemnitz,
Institut für Mechanik und Thermodynamik, Chemnitz, Straße der Nationen 62

105 Seiten
28 Abbildungen
17 Tabellen
44 Literaturzitate

Referat

In Produktionsanlagen mit radial gekoppelten Rotoren wie beispielsweise Papier- und Druckmaschinen treten im höheren Drehzahlbereich störende Schwingungen auf. Der Entstehungsmechanismus der Schwingungen ist im nichtlinearen Verhalten der Kontaktstelle in enger Abstimmung mit der elastischen Lagerung der Walzen zu suchen. In dieser Arbeit wird aus maschinendynamischer Perspektive eine systematische Zusammenstellung von Rotormodellen entwickelt. Durch die Auswahl eines geeigneten Kontaktpartners wird das Modell vervollständigt. So kann ein Minimalmodell zur Untersuchung von Schwingungsphänomenen entwickelt werden. Fokussiert auf die Beschreibung der Koppelstelle werden geeignete Kontaktmodelle abgeleitet und vereinfachend betrachtet. Ein zur Unterstützung der theoretischen Analyse entworfener Versuchsstand diente zur Durchführung zahlreicher Versuche, die Parameterwerte für die Berechnungsmodelle lieferten und Schwingungsphänomene belegten. Die beschriebenen Modelle werden zur abstrahierenden numerischen Untersuchung ausgebaut und genutzt.

Schlagworte

Maschinendynamik, Rotordynamik, Modellierung, Simulation, Rollkontakt, Schwingung, selbsterregte Schwingung, Stabilität, Stabilitätskarte

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Professur Maschinendynamik/Schwingungslehre im Institut für Mechanik der Technischen Universität Chemnitz. Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H. Dresig gilt mein besonderer Dank für die Anregung und Geduld sowie die stete Förderung meiner Forschungsarbeit.

Ebenfalls danke ich meinen lieben Kollegen, die auch zu einem guten Arbeitsklima beitrugen und stets diskussionsbereit waren. Den Herren Dr. D. Waldeck, Dr. L. Rockhausen sei an dieser Stelle besonders für die fachlichen Hilfestellungen und Anregungen gedankt. Eine sehr gute Zusammenarbeit hatte ich mit Herrn Dipl.-Ing. J. Schönitz und Herrn Dipl.-Ing. M. Weiser vom Fraunhofer Institut Werkzeugmaschinen und Umformtechnik, die mit Erfahrung und Präzision den Versuchsstand betreuten und mit den erzielten Versuchsergebnissen einen ganz wesentlichen Beitrag leisteten.

Weiterhin danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Brommundt und Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Ottl (Technische Universität Braunschweig) für die Anregungen und Unterstützung der Kontaktmodellierung sowie Herrn Dr.-Ing. H. Labrenz für die fruchtbringenden Diskussionen im gemeinsamen Forschungsprojekt. Herrn Prof. Dr.-Ing. H.P. Wölfel (Technische Universität Darmstadt) und Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Kreißig (Technische Universität Chemnitz) danke ich für die Begutachtung der Arbeit und die damit einhergehenden Mühen.

Ebenso möchte ich Herrn Dr.-Ing. M. Kustermann (Voith Paper AG), Herrn Dr.-Ing. E. Glöckner, Herrn Dipl.-Math. B. Keller (Koenig & Bauer AG) und Herrn Wimmel (ERAS GmbH) für ihre wertvollen Anregungen und Hinweise besonders bei der Gestaltung und Ausarbeitung der Versuchstechnik und der Versuche danken.

Vor allem aber danke ich meiner Frau Cornelia, meinen Töchtern sowie meinen Eltern für den erhaltenen familiären Rückhalt und die unendliche Geduld.

Dresden, im März 2008

Jörg Weiß

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	15
1.1	Problemstellung	15
1.2	Stand der Forschung	16
1.3	Ziel der Arbeit	17
2	Modellbildung	18
2.1	Überblick über Rotor-Modelle	18
2.1.1	Freiheitsgrade und Bezugslage	18
2.1.2	Referenzmodell	20
2.1.3	Modellgruppen und Defektparameter	23
2.2	Modelle gekoppelter Rotoren	28
2.2.1	Modellauswahl	28
2.2.2	Koordinatensysteme und Bezugslagen	31
2.2.3	Kontaktkraftmodell	33
2.2.4	Selbsterregungsmechanismen gekoppelter Rotoren	35
2.3	Kontaktmodell	37
2.3.1	Voraussetzungen und Annahmen	37
2.3.2	Stoffgesetz - Werkstoffmodell	43
2.3.3	Thermisches Modell	48
2.3.4	Zeitskalenmodell	51
3	Experimentelle Untersuchungen	54
3.1	Entwurf des Versuchsstands	54
3.2	Walzenparameter	56
3.3	Vorbereitende Messungen	57
3.3.1	Kennlinien der Lagerfedern	57
3.3.2	Kennlinie der Kontaktfeder	58
3.3.3	Messungen beim stationären Rollen	59
3.4	Experimentelle Modalanalysen	61

3.5	Messungen zu aufklingenden Schwingungen	66
4	Berechnungen	70
4.1	Ziel	70
4.2	Zeitskalenmethode	70
4.3	Skalierung des Ortes	72
4.4	Stationärer Zustand	72
4.5	Eigenfrequenzen und Schwingungsformen	74
4.6	Selbsterregung auf Grund regenerativer Effekte	78
4.7	Reibungsbedingte Selbsterregung	83
4.8	Stabilitätsbetrachtung für den Versuchsstand	89
5	Zusammenfassung	92
	Literatur	98
	Abbildungsverzeichnis	99
	Tabellenverzeichnis	101

Verwendete Kurzzeichen

Zeichen	Bedeutung
a	Realteil eines komplexen Eigenwerts
a_i	Polynomkoeffizient in Ansatzfunktion für Normalverschiebung
a_K	halbe Kontaktlänge
b	Imaginärteil eines komplexen Eigenwerts
b_1	Lagerdämpfung an Walze 1
b_2	Lagerdämpfung an Walze 2
b_i	Polynomkoeffizient in Ansatzfunktion für Tangentialverschiebung
b_{xA}	Lagerdämpfung in x -Richtung, Anlagenseite A
b_{xB}	Lagerdämpfung in x -Richtung, Anlagenseite B
b_{yA}	Lagerdämpfung in y -Richtung, Anlagenseite A
b_{yB}	Lagerdämpfung in y -Richtung, Anlagenseite B
b_{zA}	Lagerdämpfung in z -Richtung, Anlagenseite A
b_{zB}	Lagerdämpfung in z -Richtung, Anlagenseite B
B	Walzenbreite
\mathbf{B}	Dämpfungsmatrix
c	spezifische Wärmekapazität
f	Funktion
f_{01}	1. Eigenfrequenz
f_{02}	2. Eigenfrequenz
f_{03}	3. Eigenfrequenz
f_{04}	4. Eigenfrequenz
f_{0i}	i -te Eigenfrequenz
f_1	Funktion 1
f_2	Funktion 2
\mathbf{f}	Vektor der äußeren Kräfte
F_0	Vorspannkraft der Walzen
F_N	Kontaktkraft in Normalenrichtung
F_R	Reibkraft
F_T	Kontaktkraft in Tangentenrichtung
F_x	Kraft bezüglich der raumfesten x -Achse
F_y	Kraft bezüglich der raumfesten y -Achse
F_z	Kraft bezüglich der raumfesten z -Achse
\mathbf{G}	gyroskopische Matrix

Zeichen	Bedeutung
h	Belagdicke
h_2	Belagdicke auf Walze 2
i_{12}	Übersetzungsverhältnis, Drehzahlverhältnis
J_1	Drehträgheit der Walze 1
J_2	Drehträgheit der Walze 2
J_a	äquatoriales Massenträgheitsmoment
J_p	polares Massenträgheitsmoment
\mathbf{J}^S	Trägheitstensor bezüglich Schwerpunkt
$J_{\xi\xi}$	Komponente des Trägheitstensors
$J_{\xi\eta}$	Komponente des Trägheitstensors
$J_{\xi\zeta}$	Komponente des Trägheitstensors
$J_{\eta\eta}$	Komponente des Trägheitstensors
$J_{\eta\zeta}$	Komponente des Trägheitstensors
$J_{\zeta\zeta}$	Komponente des Trägheitstensors
k	Steifigkeit
k_1	Lagersteifigkeit an Walze 1
k_2	Lagersteifigkeit an Walze 2
k_A	Steifigkeit auf der Anlagenseite A
k_B	Steifigkeit auf der Anlagenseite B
k_N	normale Kontaktsteifigkeit
k_{N0}	konstanter Anteil der Normalsteifigkeit
k_{N1}	langsam veränderlicher Anteil der Normalsteifigkeit
k_R	Steifigkeit des Antriebsriemens der Walze 2
k_T	tangentiale Kontaktsteifigkeit
k_x	Steifigkeit in x -Richtung
k_{xA}	Lagersteifigkeit in x -Richtung, Anlagenseite A
k_{xB}	Lagersteifigkeit in x -Richtung, Anlagenseite B
k_y	Steifigkeit in y -Richtung
k_{yA}	Lagersteifigkeit in y -Richtung, Anlagenseite A
k_{yB}	Lagersteifigkeit in y -Richtung, Anlagenseite B
k_{zA}	Lagersteifigkeit in z -Richtung, Anlagenseite A
k_{zB}	Lagersteifigkeit in z -Richtung, Anlagenseite B
k_ξ	Steifigkeit im körperfester ξ -Richtung
k_η	Steifigkeit im körperfester η -Richtung

Zeichen	Bedeutung
K	Maximaler Index
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_A	Steifigkeitsmatrix des Lagers, Anlagenseite A
\mathbf{K}_B	Steifigkeitsmatrix des Lagers, Anlagenseite B
L	Lagerabstand
L_A	Lagerabstand vom Schwerpunkt zur Anlagenseite A
L_B	Lagerabstand vom Schwerpunkt zur Anlagenseite B
m	Masse
m_1	Masse der Walze 1
m_2	Masse der Walze 2
M	Drehmoment
M_2	Antriebsmoment an Walze 2
\mathbf{M}	Massenmatrix
M_x	Moment bezüglich der raumfesten x-Achse
M_y	Moment bezüglich der raumfesten y-Achse
M_z	Moment bezüglich der raumfesten z-Achse
n	Welligkeitsordnung
p	Oberflächenkraft in Normalenrichtung
p_x	x -Komponente der Oberflächenkraft in Normalenrichtung
p_y	y -Komponente der Oberflächenkraft in Normalenrichtung
P_{diss}	Dissipationsleistung
q	Oberflächenkraft in Tangentenrichtung
q_{diss}	dissipierte Energie
q_i	generalisierte Verschiebungen
q_T	generalisierte bleibende Verschiebung nach einer Umlaufdauer
q_x	x -Komponente der Oberflächenkraft in Tangentenrichtung
q_y	y -Komponente der Oberflächenkraft in Tangentenrichtung
r	radiale Koordinate
r_1	kleine radiale Koordinate (Schichtkoordinate)
r_2	große radiale Koordinate (Walzenradius)
\mathbf{r}_S	Vektor der körperfesten Schwerpunktkoordinaten
r_i	veränderlicher Radius der Walze i
R	konstanter Walzenradius
$R(\theta)$	Betrag eines komplexen Eigenwerts
R_0	reduzierter Radius
R_1	Radius der Walze 1
R_2	Radius der Walze 2
R_i	konstanter Radius der Walze i
s	räumliche Kontaktkoordinate tangential
s_0	Vorspannweg am Lager der Walze
s_1	kleine tangentiale Koordinate (Kontaktkoordinate)

Zeichen	Bedeutung
s_2	große tangentiale Koordinate (Umfangskoordinate)
S	materielle Kontaktkoordinate tangential
S_m	Masseschwerpunkt
t	Zeit
t_0	Startzeit
T	Zeitkonstante Umlaufdauer
T_2	Umlaufdauer der Walze 2
T_K	halbe Kontaktdauer
T_U	halbe Umlaufdauer
u	Tangentialverschiebung im Kontakt über Kontaktkoordinate ψ bzw. s
u_0	globale Tangentialverschiebung im Kontakt
u_1	Tangentialverschiebung im Kontakt über Kontaktkoordinate ψ bzw. s
U	Unwucht
v	Normalverschiebung im Kontakt über Kontaktkoordinate ψ bzw. s
v_0	globale Normalverschiebung im Kontakt
v_1	äußere Normalverschiebung im Kontakt
v_{11}	schnelle äußere Verschiebung am viskoleastischen Element
v_{12}	langsame äußere Verschiebung am viskoleastischen Element
v_2	innere Normalverschiebung im Kontakt
v_3	innere Normalverschiebung im Kontakt
v_i	innere Normalverschiebung im Kontakt
v_k	innere Normalverschiebung im Kontakt
v_{k1}	schnelle innere Verschiebung im k -ten viskoelastischen Element
v_{k2}	langsame innere Verschiebung im k -ten viskoelastischen Element
v_L	konstante Liefergeschwindigkeit
\bar{v}_0	globale Normalverschiebung im Kontakt im stationären Zustand
W_R	Reibarbeit
x	raumfeste kartesische Koordinate x
x_1	Verschiebung des Mittelpunkts der Walze 1 in raumfeste x -Richtung
x_2	Verschiebung des Mittelpunkts der Walze 2 in raumfeste x -Richtung
\mathbf{x}	Koordinatenvektor
$\hat{\mathbf{x}}$	Amplitudenvektor der Koordinaten
\bar{x}	kontaktfeste Koordinate
\bar{x}_1	kontaktfeste Koordinate
\bar{x}_2	kontaktfeste Koordinate
X	Integrationskonstante
X_j	Integrationskonstante
y	raumfeste kartesische Koordinate y
y_1	Verschiebung des Mittelpunkts der Walze 1 in raumfeste y -Richtung
y_2	Verschiebung des Mittelpunkts der Walze 2 in raumfeste y -Richtung
\bar{y}_1	Verschiebung des Walzenmittelpunkts 1 im stationären Zustand
\bar{y}_2	Verschiebung des Walzenmittelpunkts 2 im stationären Zustand

Zeichen	Bedeutung
\bar{y}	kontaktfeste Koordinate
\bar{y}_1	kontaktfeste Koordinate
\bar{y}_2	kontaktfeste Koordinate
y_T	bleibende Verschiebung nach einem Umlauf
Y	Integrationskonstante
Y_j	Integrationskonstante
z	raumfeste kartesische Koordinate z

Zeichen	Bedeutung
α	Defektparameter
α_A	Wärmeübergangszahl am Walzenaußenrand
α_i	dimensionsloser Defektparameter i
α_I	Wärmeübergangszahl am Walzeninnenrand
β	dimensionsloser Eigenwert
β_W	Kreuzungswinkel der Walzen
γ	Verhältnis von Nutations- zu Verschiebungseigenkreisfrequenz
γ_0	Neigungswinkel der Verbindungslinie der Walzen
δ	Ansatzfreiwert im Näherungspolynom für die Tangentialverschiebung
$\delta(\theta)$	Phasenwinkel eines komplexen Eigenwerts
δ_ϑ	thermische Abklingkonstante
ε	kleine dimensionslose Größe
ε_2	kleine Deformation
ε_i	kleine Deformation
ζ	körperfeste kartesische Koordinate
η	körperfeste kartesische Koordinate
θ	dimensionslose Zeit
θ_0	dimensionslose Zeit der Ordnung 0
θ_1	dimensionslose schnelle Zeit (Kontaktzeit)
θ_1	dimensionslose Zeit der Ordnung 1
θ_2	dimensionslose langsame Zeit (Umlaufzeit)
θ_2	dimensionslose Zeit der Ordnung 2
Θ_ζ	körperfester Winkel bezüglich der ζ -Achse
κ	Steifigkeitsverhältnis
κ_i	Materialsteifigkeit
κ_N	Materialsteifigkeit
λ	spezifisches Wärmeleitvermögen
μ	Gleitreibungswert
μ_0	Haftreibungswert
ξ	körperfeste kartesische Koordinate

Zeichen	Bedeutung
ξ_K	dimensionslose Kontaktkoordinate (bzgl. Kontaktlänge)
ρ	Materialdichte
τ_1	Relaxationszeitkonstante
τ_2	Relaxationszeitkonstante
τ_3	Relaxationszeitkonstante
τ_i	Relaxationszeitkonstante
τ_k	Relaxationszeit des k-ten viskoelastischen Elements
τ_N	Relaxationszeitkonstante des N-ten viskoelastischen Elements
ϑ	Temperatur
ϑ_A	Temperatur am Kontaktauslauf
ϑ_E	Temperatur am Kontakteinlauf
ϑ_0	Umgebungstemperatur (gemittelt)
ϑ_{WA}	Umgebungstemperatur am Walzenaußenrand
ϑ_{WI}	Umgebungstemperatur am Walzeninnenrand
Φ_0	massebezogene Vorspannkraft
φ	Drehwinkel der Walze um die raumfeste z -Achse
φ_1	Drehung der Walze 1 bezüglich z_1 Achse
φ_2	Drehung der Walze 2 bezüglich z_2 Achse
φ_x	Drehwinkel um die raumfeste x -Achse
φ_y	Drehwinkel um die raumfeste y -Achse
φ_z	Drehwinkel um die raumfeste z -Achse
ψ	Neigung der Steifigkeitsachsen im raumfesten Koordinatensystem
ψ_1	Drehwinkel bezüglich kontaktfester Koordinate \bar{z}_1
ψ_2	Drehwinkel bezüglich kontaktfester Koordinate \bar{z}_2
ψ_2	Kontaktkoordinate Winkel an der Walze 2
ψ_a	Begrenzung Kontaktbereich Auslaufseite in kontaktfesten Koordinaten
ψ_E	Begrenzung Kontaktbereich Einlaufseite in kontaktfesten Koordinaten
ψ_N	Neigungswinkel der Kontaktfläche
Ω	konstante Winkelgeschwindigkeit
ω_η	Winkelgeschwindigkeit um die körperfeste η Achse
ω_ξ	Winkelgeschwindigkeit um die körperfeste ξ Achse
ω_ζ	Winkelgeschwindigkeit um die körperfeste ζ Achse
ω_{01}	1. Eigenkreisfrequenz
ω_{02}	2. Eigenkreisfrequenz
ω_{03}	3. Eigenkreisfrequenz
ω_{04}	4. Eigenkreisfrequenz
ω_{0i}	i -te Eigenkreisfrequenz
Ω_1	konstante Winkelgeschwindigkeit der Walze 1
Ω_2	konstante Winkelgeschwindigkeit der Walze 2
ω_K	Eigenkreisfrequenz der Kontaktschwingung
ω_{Nt}	Eigenfrequenz der Nutationsbewegung
ω_N	Kreisfrequenz der Normalsteifigkeit

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Problemstellung

Die Untersuchung des rollenden Kontakts hat eine lange Tradition, blieb jedoch zunächst weitgehend beschränkt auf den Schienenfahrzeugbau (Rad-Schiene-Kontakt) und Kraftfahrzeugbau (Rad-Straße-Kontakt). Die Nutzung der lokal hohen Pressung zwischen zwei Walzen bzw. Zylindern sowie die Möglichkeit des kontinuierlichen Transports von flächigen (Papierbahnen, Folien, Stoffe) bzw. linienförmigen Gütern (Konstruktionsprofile, Fäden, Drähte) in Produktionsanlagen führte zur Entwicklung technischer Lösungen mit radial gekoppelten Walzen in Walzwerksanlagen, Papier und Druckmaschinen, Textilmaschinen und Maschinen der Kunststoffindustrie. Das Streben nach ständig zunehmender Produktionsleistung, erreicht durch höhere Drehzahlen, zeigt zunehmend störende Schwingungen auch an oben genannten Produktionsanlagen.

Beleg dafür sind Schwingungsuntersuchungen an Walzwerksanlagen, an Rollenmühlen, an Kalandervalzen in der Kunststoffindustrie, an Spulern und Wicklern der Textilindustrie sowie und vor allem an Papiermaschinen und Druckmaschinen. Besonders an letzteren führen kleine Schwingungen zu sichtbaren Qualitätsmängeln am Erzeugnis.

Die theoretische Erforschung der Rotordynamik und die experimentelle und numerische Untersuchung von Gleit- und Wälzlager sowie deren Anwendung in der Praxis lässt die klassischen Schwingungserreger in rotierenden Systemen wie Unwuchten der Walzen, umlaufende geometrische Fehler und Steifigkeitsschwankungen in Lagern und Lagersitzen dabei zunehmend nicht mehr zur umfassenden Klärung der unerwünschten Schwingungen in Produktionsanlagen ausreichen. Der Entstehungsmechanismus dieser Schwingungen ist im nichtlinearen Verhalten der Kontaktstelle in enger Abstimmung mit der elastischen Lagerung der Walzen zu suchen.

1.2 Stand der Forschung

Nahezu alle Untersuchungen zum Kontakt zylindrischer Körper benutzen die bekannten Hertz'schen Gleichungen zur Berechnung von Druck und Abplattung in der Kontaktstelle als Ausgangspunkt für Weiterentwicklungen zum rollenden Kontakt unter Berücksichtigung von Druck und Scherkräften im Kontaktbereich. Diese Untersuchungen beschränken sich dabei oftmals auf die numerische bzw. näherungsweise analytische Lösung des stationären Kontaktproblems. Die dabei entwickelten Modelle sind zur Analyse der Maschinendynamik dieser Anlagen zu aufwändig.

Neben den klassischen Arbeiten von Carter und Johnson zum rollenden Kontakt an Eisenbahnrädern in der englischsprachigen Literatur finden sich in der deutschsprachigen Literatur vor allem die Arbeiten von Föppl, Fromm und Bufler [Buf59], [Buf61] zum rollenden Kontakt.

Dynamische Untersuchungen an gekoppelter Rotoren erfolgten in Deutschland vor allem im Bereich des Rad-Schiene Kontakts. In einem DFG-Sonderforschungsbereich ([KB98]) entstanden Beiträge zu Laufdynamik und Verschleiß von Eisenbahnrädern, in denen bemerkenswerte Modelle, Methoden und Lösungen erarbeitet wurden, s. Langemann [Lan01] und Meinders [Mei97], [Mei99]. Weitere wesentliche Arbeiten zum Rollkontakt durch Kalker [Kal73] und die Anwendung numerischer Methoden zur Lösung des Kontaktproblems sind an der TU Delft entstanden (z.B. [Bra93]).

Eine Vielzahl an Arbeiten, besonders zum rollenden Kontakt mit mindestens einem viskoelastischen Kontaktpartner finden sich im Umfeld von Knothe. Dabei werden nicht nur stationärer Lauf und Dynamik viskoelastischer Rollkörper untersucht ([WK88], [Yin96]). Es werden auch die Wärmeentwicklung im Rollkörper und die damit einhergehende Änderung der Material- und Kontaktparameter untersucht ([Ham97], [Tro00]).

In allen diesen Arbeiten werden numerische Untersuchungen mit selbst entwickelten Berechnungsprogrammen (NORM und TANG von Kalker, MATLAB-Programme) durchgeführt. Die Anwendung kommerzieller Berechnungssoftware führt oft nicht zu effizienten Lösungen, s. [Mic99]. Folgerichtig beschäftigen sich neuere Forschungsarbeiten von Zastrau und Nackenhorst (z.B. [NZJ00]) mit der Anwendung der Methode der finiten Elemente auf Problemstellungen zum rollenden Kontakt, wiederum vor allem für das Paar Rad-Schiene. Ebenfalls FEM-Lösungen zum Kontakt einer starren Walze mit einer gummibeschichteten Walze zeigen Batra [Ra76], [Bat80], [Bat81] und Bapat [BB82], [BB84]. Schwingungseffekte an Walzensystemen in Produktionsanlagen werden von R.Grunau [Gru93] untersucht. Ebenso die folgende Bewertung von Gegenmaßnahmen durch E. Grunau [Gru97]. Weitere Einrichtungen zur Schwingungsminderung finden sich in Patent- und Offenlegungsschriften ([Kus98], [GK01], [Wa99]).

1.3 Ziel der Arbeit

Es wird aus der Sicht der Maschinendynamik eine systematische Zusammenstellung von Rotormodellen mit zunehmendem Detail- und damit auch Schwierigkeitsgrad entwickelt. Eine Zusammenstellung möglicher Abweichungen von einem idealisierten Bezugsmodell liefert Ansätze für mögliche Mechanismen zur Schwingungserregung.

Das Rotormodell wird durch die Auswahl eines geeigneten Kontaktpartners zum System radial gekoppelter Rotoren vervollständigt. Abhängig von der Aufgabenstellung kann so ein Minimalmodell zur Untersuchung von Schwingungsphänomenen entwickelt werden. Dabei bedeutet der Begriff Minimalmodell ein Modell mit den notwendigen Freiheitsgraden und Parametern zur Untersuchung eines beobachteten maschinendynamischen Effekts.

Ein weiterer wesentlicher Modellbaustein im System gekoppelter Rotoren ist die Beschreibung der Koppelstelle. Es sollen geeignete Kontaktmodelle entwickelt werden, die mit den zuvor erarbeiteten maschinendynamischen Rotor- bzw. Walzenmodellen kombinierbar sind. Die Betrachtung wird beschränkt auf den Kontakt einer Stahlwalze mit einer polymerbeschichteten Stahlwalze. Aus der geringen Dicke des Polymerbelags und den Materialkennwerten im Vergleich zum Stahlkern der Walzen werden Möglichkeiten zur Vereinfachung des Kontaktproblems angegeben und genutzt.

Zur Unterstützung des theoretischen Teils der Arbeit wird ein Versuchsstand entworfen und gebaut. An diesem Versuchsstand sollen zahlreiche Versuche zur Analyse des Systems gekoppelter Rotoren durchgeführt werden. Die Versuchsergebnisse dienen der Ermittlung von Parameterwerten für die Berechnungsmodelle sowie zur Verifizierung von Simulationsergebnissen. In diesem Kontext ergänzen sich Versuch und numerische Simulation und ermöglichen so ein Verständnis der Mechanismen, die zur Entstehung selbsterregter Schwingungen beitragen.

In einem weiteren Kapitel werden die zuvor beschriebenen Modelle zur abstrahierenden numerischen Untersuchung der Selbsterregung durch Lagekopplung und Reibung bzw. durch regenerative Verformung und Temperaturentwicklung ausgebaut und genutzt. Daran knüpft die Auswahl eines Modells des Versuchsstands an. Mit diesem Modell werden das Einlaufverhalten sowie Kurz- und Langzeitdynamik an Hand von Temperaturentwicklung, Drehzahlhochlauf, Eigenfrequenzen und Schwingungsformen und das Entstehen von selbsterregten Schwingungen diskutiert. Den Abschluss bildet eine Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse.

Kapitel 2

Modellbildung

2.1 Überblick über Rotor-Modelle

2.1.1 Freiheitsgrade und Bezugslage

Den Ausgangspunkt der Modellbildung bildet das Referenzmodell eines Rotors, mit allen Starrkörperfreiheitsgraden sowie einer minimalen Anzahl Parameter und Koordinatensysteme zur Beschreibung der Rotorbewegung. Aufbauend auf dieser Definition werden Defekte, also Abweichungen der Parameter von denen des Referenzmodells, untersucht und deren Einfluss auf das System Rotor bzw. gekoppelter Rotor herausgearbeitet. Dabei ergibt sich eine Trennung in konstruktiv beeinflussbare große α -Abweichungen und fertigungsbedingte kleine ε -Abweichungen vom Referenzmodell. Diese Klassifikation der Defekte erleichtert die Auswahl eines geeigneten Minimalmodells bzw. ermöglicht die Diskussion von Fehlern, die durch die Vernachlässigung kleiner Abweichungen im Minimalmodell entstehen.

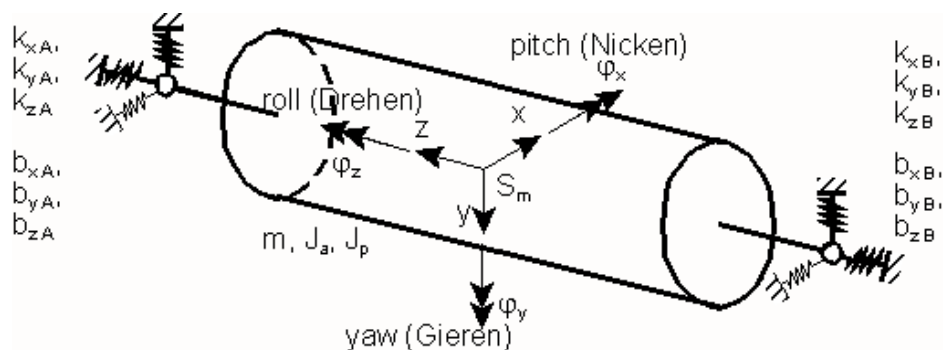


Abbildung 2.1: Koordinaten und Bezeichnungen am starren Rotor

Die Bezeichnung der Koordinaten des Rotors wird hier vorgehend auf das zu untersuchende System zweier radial gekoppelter Rotoren eingeführt. Zusätzlich wird die Ein-

ordnung des Rotorsystems in eine Anlage bzw. Maschine berücksichtigt. Daraus ergibt sich die in Abb. 2.1 angegebene Bezeichnung.

Die translatorischen Freiheitsgrade sind im Verschiebungsvektor des geometrischen Mittelpunkts des Rotors in raumfesten kartesischen Koordinaten (x, y, z) beschrieben. Diese werden so gewählt, dass in der Bezugslage die z -Achse in Richtung der Drehachse zeigt und den positiven Drehsinn der Rotation definiert.

Die Komponenten der Drehgeschwindigkeiten sind in der Rotordynamik den Achsen eines körperfesten Koordinatensystems (ξ, η, ζ) zugeordnet mit ζ als Drehachse. Die Bewegung gekoppelter Roter zueinander wird jedoch zweckmäßig in raumfesten Koordinaten beschrieben. Es ist eine Transformation des Drehgeschwindigkeitsvektors und des Drehmomentenvektors in der Eulerschen Form der Bewegungsgleichungen vom körperfesten in ein raumfestes Bezugssystem notwendig. Bei einer Abspaltung der Rotation des Rotors als Primär- bzw. Sollbewegung und der Einführung kleiner Auslenkungswinkel

1. φ_z als kleine Drehung des Rotors um die Primärbewegung,
2. φ_x als kleine Kippung der Walze um die x -Achse (Querachse) bzw. Nicken,
3. φ_y als kleine Kippung der Walze um die y -Achse (Hochachse) oder Gieren,

erhält man die Vereinfachung der entsprechenden Transformation zu

$$\begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) & 0 \\ -\sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \Omega + \dot{\varphi}_z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

jeweils unter der Beachtung (sehr) kleiner Winkelauslenkungen $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ des Rotors gegenüber seiner Bezugslage.

Die Definition geeigneter Bezugslagen zur Beschreibung der Rotorbewegung ist vom Ziel der Betrachtung abhängig. Im einfachsten Fall kann die statische Ruhelage als Bezugslage gewählt werden. Dabei ist der Rotor frei von äußeren und /oder Kontaktkräften, was bei der Betrachtung von Hochlauf oder Belastungsvorgängen aus dem Stillstand zutrifft.

Als Ergebnis derartiger Untersuchungen zu Auslenkungen aus der statischen Ruhelage folgt in der Regel die stationäre Lage als weitere Bezugslage in Untersuchungen des Laufverhaltens von Rotoren. Eine stationäre Lage ist durch die Drehung um die z -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω und bei konstanten Auslenkungen aus der Ruhelage unter der Wirkung äußerer Kräfte und/oder Kontaktkräfte gekennzeichnet.

2.1.2 Referenzmodell

Das Referenzmodell sei ein starrer Rotor, der rotationssymmetrisch und symmetrisch zum Schwerpunkt entlang der Drehachse ist. Die Geometrie des symmetrischen Rotors als Referenz ist durch die Parameter Rotorlänge B und Rotorradius R gegeben. Die Masse m sowie das polare und äquatoriale Massenträgheitsmoment J_p und J_a beschreiben seine Trägheitseigenschaften. Die Lager seien isotrop elastisch und symmetrisch im Abstand $L/2$ zum Schwerpunkt S_m angeordnet. Die Dämpfungseigenschaften der Lager und die Materialdämpfung im Rotor seien vernachlässigbar klein. Die Primärbewegung des Rotors sei durch eine konstante Winkelgeschwindigkeit Ω gegeben.

	idealer Rotor	allgemeiner Rotor	Defektgrößen
Geometrie-parameter	B, R	$B, R(\Theta_\zeta, \zeta)$	unrunder Rotor
Trägheits-parameter	m, J_a, J_p	$m, \mathbf{r}_{S(3 \times 1)}, \mathbf{J}_{(3 \times 3)}^S$	Kreiselmomente, statische Unwucht, dynamische Unwucht, unsymmetrischer Rotor
Lagersteifigkeit	k	$\mathbf{K}_{A(3 \times 3)}, \mathbf{K}_{B(3 \times 3)}$	Lageranisotropie raumfest bzw. umlaufend
Lagerabstand	$2L$	L_A, L_B	Lagerunsymmetrie
Lagerdämpfung	/	$\mathbf{B} = b\mathbf{K}$	proportionale Dämpfung
Antriebsgröße	$\Omega = \text{konst.}$	$M(\dot{\varphi}_z, \Omega)$	Antriebskennlinie

Tabelle 2.1: Parameter eines elastisch gestützten Rotors

Diesem Referenzmodell wird das Modell des allgemeinen starren Rotors gegenübergestellt. Die Anzahl der Parameter erhöht sich durch die Einführung von Defektparametern von sieben beim idealen Rotor auf maximal 23 Parameter sowie die Beschreibung der Zylinderform und die Kennlinie des Antriebs, siehe Tab. 2.1. Diese Zusammenstellung zeigt die Notwendigkeit einer systematischen Herangehensweise an die Modellbildung des Rotors bzw. gekoppelter Rotoren. Als zweckmäßig erscheint es, Abweichungen vom idealen Rotor bzw. Defekte des idealen Rotors zu definieren, deren Einfluss auf das dynamische Verhalten einzeln zu untersuchen, und dabei nur die benötigten Koordinaten im Modell zu berücksichtigen.

Der Ausgangspunkt sei die Bewegungsgleichung des idealen Rotors in einem raumfesten Koordinatensystem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}(\Omega)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (2.2)$$

Die Massenmatrix \mathbf{M} und Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} sind Diagonalmatrizen und entkoppeln

für den Fall des nichtdrehenden Rotors die sechs Differenzialgleichungen des idealen Rotors. Die Wirkung von Abweichungen bzw. Defekten des idealen Systems zeigt sich in Kopplungen zwischen den Freiheitsgraden, die die Eigenfrequenzen verstimmen und die Eigenschwingungsformen aus den Formen des idealen Systems zusammensetzen.

Für den drehenden Rotor koppeln die Kreiselmomente in der antimetrischen Gyroskopmatrix $\mathbf{G}(\Omega)$ die Nick- mit der Gierbewegung. Damit sind nur noch die Differenzialgleichungen der Kippungen um die x - und y -Achse und die Verlagerungen in x - und y -Richtung entkoppelt. Die Einteilung in die Modellgruppen eins und zwei gemäß Tab. 2.2 ist damit in der Struktur der Bewegungsgleichung des idealen Rotors gegeben.

Die Modelle in Tab. 2.2 sind nach steigender Komplexität angegeben. Der jeweiligen Modellgruppe sind die Freiheitsgrade und Defekte zugeordnet, die untersucht werden können. Dabei werden mit Blick auf die spätere Entwicklung von Modellen radial gekoppelter Rotoren nur diejenigen betrachtet, in denen die Drehbewegung des Rotors und eine Änderung des Normalkontakts berücksichtigt werden.

Die Modelle der Gruppe 1 in Tab. 2.2 beschreiben die ebene Bewegung des Rotors senkrecht zu seiner Drehachse und erlauben die Diskussion von Störungen der Rotationssymmetrie wie raumfeste und körperfeste Steifigkeitsanisotropien und statische Unwuchten. Im Sinne einer modalen Betrachtung realer Rotoren bildet diese Modellgruppe die ersten symmetrischen Eigenformen des Rotors mit den tiefsten Eigenfrequenzen ab. Alle Größen in Richtung der Drehachse gehen als gemittelte bzw. integrale Größen in das Modell ein.

Die Kippfreiheitsgrade und die Rotation werden in der zweiten Modellgruppe in Tab. 2.2 betrachtet. Neben den Kreiselmomenten als wesentlichen Effekt in Rotorsystemen erfasst dieses Modell auch die Wirkung dynamischer Unwuchten und unsymmetrische Masseverteilungen. In einer modalen Betrachtung sind diese Modelle eine gute Abbildung der ersten antimetrischen Eigenformen.

Die Modelle der Gruppe drei in Tab. 2.2 erlauben die Diskussion von Störungen der Längssymmetrie unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung. Diese Modelle haben eine gewisse Bedeutung als Minimalmodelle bei der Untersuchung von fliegend gelagerten Rotoren, deren erste Eigenformen nicht eindeutig durch Verlagerung oder Kippung, sondern immer durch eine Kopplung dieser Bewegungen zu beschreiben sind. Die Größe der Kopplung bestimmt die Hebellänge L_A, L_B in den Ersatzmodellen. Für Systeme mit beidseitig gestützten langen Walzen ist diese Modellgruppe kaum von Bedeutung, da deren tiefste symmetrische (Verlagerung) und antimetrische (Kippung) Eigenform in erster Näherung mit Modellen der Gruppen eins und zwei hinreichend genau beschrieben werden.

Die vierte Gruppe folgt aus der Zusammenfassung der Gruppen eins bis drei. Das Zusam-

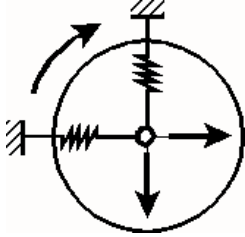
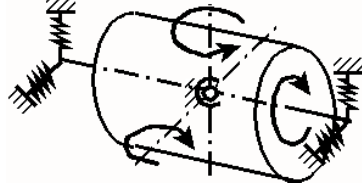
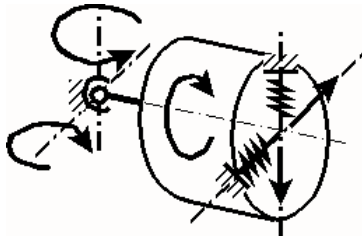
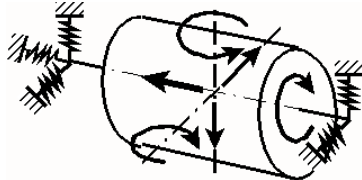
Modell	Bewegungsgleichung	Umfang
Gruppe 1 	$\mathbf{M}_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1$ $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x & y & \varphi_z \end{pmatrix}^T$ $\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} F_x & F_y & M_z \end{pmatrix}^T$	<ul style="list-style-type: none"> · Störung der Rotationssymmetrie · modales Modell für erste Eigenform beidseitig gestützter Rotoren
Gruppe 2 	$\mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2$ $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix}^T$ $\mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} M_x & M_y & M_z \end{pmatrix}^T$	<ul style="list-style-type: none"> · Kreiselwirkung · unsymmetrische Masseverteilung · zweite Eigenform beidseitig gestützter Rotoren
Gruppe 3 	$\mathbf{M}_3 \ddot{\mathbf{x}}_3 + \mathbf{K}_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{f}_3$ $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x & y & \varphi_z \end{pmatrix}^T$ $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} F_x & F_y & M_z \end{pmatrix}^T$ $\mathbf{M}_3 \ddot{\mathbf{x}}_3 + \mathbf{K}_3 \mathbf{x}_3 = \mathbf{f}_3$ $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix}^T$ $\mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} M_x & M_y & M_z \end{pmatrix}^T$	<ul style="list-style-type: none"> · Kreiselwirkung · Störung der Längssymmetrie · erste und/oder zweite Eigenform fliegend gestützter Rotoren
Gruppe 4 	$\mathbf{M}_4 \ddot{\mathbf{x}}_4 + \mathbf{K}_4 \mathbf{x}_4 = \mathbf{f}_4$ $\mathbf{x}_4 = \begin{pmatrix} x & y & z & \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix}^T$ $\mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z & M_x & M_y & M_z \end{pmatrix}^T$	<ul style="list-style-type: none"> · Störung der Längssymmetrie der Steifigkeit · Starrkörper-Eigenformen beliebig gestützter Rotoren

Tabelle 2.2: Modellgruppen zur Beschreibung des elastisch gestützten starren Rotors

menwirken der bisher genannten Störungen von Rotations- und Längssymmetrie unter Berücksichtigung der Kreiselwirkung wird in den Systemgleichungen erfasst. Aus formalen Gründen wird auch die Verschiebung in Längsrichtung erfasst. Diese Verschiebung ist aber für alle betrachteten Rotorsysteme von den übrigen Bewegungen entkoppelt und kann vereinfachend weggelassen werden.

Für Grundlagenuntersuchungen zum Einfluss von Defektparametern sowie zur Aufdeckung von Selbsterregungsmechanismen eignen sich besonders Modelle der Gruppen eins, zwei und drei in Tab. 2.2 als Minimalmodelle mit wenigen Freiheitsgraden und Parametern, aber einer guten Anschaulichkeit der Ergebnisse. Die Annahme einer konstanten Drehzahl verringert den Freiheitsgrad der Modelle noch einmal um eins.

Für Sonderfälle, deren dynamisches Verhalten nicht ausreichend genau mit Modellen der

Gruppen eins bis drei wiedergegeben wird, muss das Berechnungsmodell gemäß Gruppe vier gebildet werden. Ein Modell der Gruppe vier eignet sich auch als Vergleichsmodell, um den Einfluss von Defektparametern gegeneinander abzuschätzen oder um den Fehler durch die Vereinfachungen in Modellen der Gruppen eins bis drei zu ermitteln.

Unter dem Aspekt einer modalen Modellbildung entstehen Modelle der Gruppen eins bis drei als Ergebnis einer experimentellen oder numerischen Modalanalyse (FEM) realer Rotoren. Diese stehen dann als Minimalmodelle mit angepassten Parametern zur Untersuchung von Selbsterregungsmechanismen, in Regelkreisen und anderen Anwendungen zur Verfügung.

2.1.3 Modellgruppen und Defektparameter

Die Drehung um z bzw. Rotation ist die primäre Bewegung des Rotors. Die Annahme einer stationären Drehung mit konstanter Drehzahl ist in erster Näherung bei vielen Systemen gegeben und führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Bewegungsgleichung. Bei einer Modellverfeinerung können der stationären Drehung kleine Drehschwingungen überlagert werden. Eine Schwingungsanregung auf Grund der angegebenen Defekte resultiert jeweils aus der Rotordrehung. Die Beispiele in den Tab. 2.3 bis Tab. 2.5 zeigen, dass die einfache Antriebsfrequenz als Grundfrequenz der Anregung durch Unwuchtkräfte und -momente und die doppelte Antriebsfrequenz in umlaufenden Parameteränderungen zu finden sind.

Die Unterschiede gestörter Rotoren zum idealen Rotor werden klassifiziert und geordnet:

- Abweichungen α_i - sind konstruktive Möglichkeiten der Beeinflussung des Schwingungsverhaltens bzw. zwangsläufig bedingt durch die Rotorform und Betriebsparameter. Hierzu zählen Kreismomente und Steifigkeitsanisotropie der Lager.
- primäre Defekte ε - sind klein gegenüber den Referenzgrößen, resultieren aus Fertigungsfehlern und beeinflussen das Schwingungsverhalten des Rotors. Dazu sollen mitdrehende Steifigkeitsanisotropien, Trägheitsanisotropien des Rotors und Dämpfungen in den Lagern und im Rotor gezählt werden.
- sekundäre Defekte - sind klein gegenüber den Referenzgrößen, resultieren aus Fertigungsfehlern und beeinflussen das Verhalten des Rotors beim Rollen auf einem Gegenstück. Dazu gehören Fehler der Zylinderform.

Tabelle 2.3: Defektparameter in Modellgruppe 1

Defektparameter	Kräfte und Momente
Steifigkeitsanisotropie in der x-y-Ebene	$k = \frac{k_x + k_y}{2} ; \alpha_1 = \frac{k_x - k_y}{k_x + k_y}$ $-1 < \alpha_1 < 1, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} :$ $k_x \ll k_y : \alpha_1 \approx -1$ $k_x = k_y : \alpha_1 = 0$ $k_x \gg k_y : \alpha_1 \approx +1$
Steifigkeitsanisotropie in der ξ - η -Ebene	$k = \frac{k_\xi + k_\eta}{2} ; \alpha_2 = \frac{k_\xi - k_\eta}{k_\xi + k_\eta}$ $0 \leq \alpha_2 \ll 1$
- Umrunder Querschnitt der Rotorzapfen	$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{pmatrix} = 2k \begin{pmatrix} 1 + \alpha_2 \cos(2\Omega t) \\ \alpha_2 \sin(2\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \sin(2\Omega t) \\ 1 - \alpha_2 \cos(2\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$
statische Unwucht U mit $\alpha_3 = \frac{U}{mR}$ durch Schwerpunktverschiebung in der ξ - η -Ebene z.B. mit $\mathbf{r}_s = R \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ $0 \leq \alpha_3 \ll 1 :$	$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J_p + (\alpha_3 r)^2 m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_z \end{pmatrix} - \alpha_3 m R \Omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) \\ \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$
- hier nur Restunwucht - größere Werte an Wickeln, Spulen und Zentrifugen möglich	

Tabelle 2.4: Defektparameter in Modellgruppe 4

Defektparameter		Kräfte und Momente	
Steifigkeit unsymmetrisch bezüglich x - y -Ebene	bezüglich x - y -Ebene		
$k = \frac{k_A + k_B}{2}$; $\alpha_4 = \frac{k_A - k_B}{k_A + k_B}$ $-1 < \alpha_4 < 1$ $k_A \ll k_B$: $\alpha_4 \approx -1$ $k_A = k_B$: $\alpha_4 = 0$ $k_A \gg k_B$: $\alpha_4 \approx +1$		$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = 2k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_4 L & 0 \\ 0 & -\alpha_4 L & L^2 & 0 \\ \alpha_4 L & 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}$	
Lager unsymmetrisch bezüglich x - y -Ebene			
$L = \frac{L_A - L_B}{2}$; $\alpha_5 = \frac{L_A + L_B}{L_A - L_B}$ $-1 < \alpha_5 < 1$ $ L_A/L_B \ll 1$: $\alpha_5 \approx -1$ $L_A = -L_B$: $\alpha_5 = 0$ $ L_B/L_A \ll 1$: $\alpha_5 \approx +1$		$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = 2k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_5 L & 0 \\ 0 & -\alpha_5 L & L^2 & 0 \\ \alpha_5 L & 0 & 0 & L^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}$	
Schwerpunktverschiebung auf der ζ -Achse			
$\mathbf{r}_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_6 L \end{pmatrix}^T$ $-1 < \alpha_6 < 1$ Masse konzentriert in $z = L/2$: $\alpha_6 = +1$ $z = -L/2$: $\alpha_6 = -1$		$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_6 L & 0 \\ 0 & \alpha_6 L & \frac{J_a}{m} + (\alpha_6 L)^2 & 0 \\ -\alpha_6 L & 0 & 0 & \frac{J_a}{m} + (\alpha_6 L)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{pmatrix}$	

Tabelle 2.5: Defektparameter in Modellgruppe 2

Defektparameter	Kräfte und Momente
Kreiselmomente	
$J_1^S = J_a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = J_a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{pmatrix} + J_a \Omega \begin{pmatrix} 0 & \alpha_7 & 0 \\ -\alpha_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{pmatrix}$
$\alpha_7 = J_p/J_a$ $0 < \alpha_7 < 2$:	
Stab : $\alpha_7 \ll 1$	
Kugel : $\alpha_7 = 1$	
Scheibe : $\alpha_7 = 2$	
unsymmetrischer Rotor	
$J_2^S = J_a \begin{pmatrix} 1 + \alpha_8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha_8 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = J_a \begin{pmatrix} 1 + \alpha_8 \cos(2\Omega t) & \alpha_8 \sin(2\Omega t) & 0 \\ \alpha_8 \sin(2\Omega t) & 1 - \alpha_8 \cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{pmatrix}$
$J_a = (J_{\xi\xi} + J_{\eta\eta})/2$ $J_p = J_{\zeta\zeta}$ $\alpha_8 = 2(J_{\xi\xi} - J_{\eta\eta})/J_a$ $0 \leq \alpha_8 < 1$:	
Rotationskörper : $\alpha_8 = 0$	
Zweiblattrotor : $\alpha_8 \rightarrow 1$	
(rotierender Stab)	
dynamische Unwucht	
$J_3^S = J_a \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha_9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_9 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = J_a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \\ \ddot{\varphi}_z \end{pmatrix} + J_a \Omega \begin{pmatrix} 0 & \alpha_7 & 0 \\ -\alpha_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \end{pmatrix}$
$\alpha_9 = J_{\xi\xi}/J_a$ $0 < \alpha_9 \ll 1$:	
- kleine Restunwucht	$+ J_a \Omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_9 \cos(\Omega t) \\ \alpha_9 \sin(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$
- größere dynamische Unwucht bei Wickeln und Spulen möglich	

Störung der Rotationssymmetrie

Eine Betrachtung der Bewegung des Rotors in der x - y -Ebene zeigt, dass eine Kopplung der Translation in x - und y -Richtung durch Symmetriefehler bezüglich der Rotationssymmetrie um die Drehachse entstehen. Durch geeignete anisotrope Steifigkeitsachsen der Lager ergeben sich nicht schwache Kopplungen der Differenzialgleichungen. Diese können zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens ausgenutzt werden und bieten eine gewisse konstruktive Freiheit bei der Gestaltung von Rotorsystemen. Aus umlaufenden Defekten (Anisotropien) der Steifigkeit, wie zum Beispiel bei unrunde Wellenzapfen, folgt das Differenzialgleichungssystem für ein parametererregtes System. Dessen Parameter ändern sich periodisch mit der doppelten Antriebsdrehzahl.

Statische Unwucht

In erster Näherung liefert die statische Unwucht eine Kraft in radialer Richtung, welche mit der Rotordrehzahl umläuft. In zweiter Näherung erfolgt eine schwache umlaufende Kopplung der Verschiebungen mit der Drehschwingung des Rotors.

Kreiselwirkung

Der Einfluss der Kreiselwirkung auf das System kann aus dem Verhältnis der Eigenkreisfrequenz der Nutation des ungefesselten Rotors $\omega_{Nt} = J_p/J_a\Omega$ zu den Eigenkreisfrequenzen ω_{0i} des gefesselten Systems ohne Kreiselwirkung abgeschätzt werden. Es wird deutlich, dass bei einem sehr kleinen Verhältnis des polaren zum äquatorialen Trägheitsmoment J_p/J_a schlanker Rotoren sowie bei niedriger Antriebswinkelgeschwindigkeit die Nick- und Gierbewegung durch die Kreiselmomente lediglich schwach gekoppelt sind. Für derartige Systeme kann die Kreiselwirkung in erster Näherung vernachlässigt werden.

Unsymmetrischer Rotor

Dieses Modell ist für den hier betrachteten Fall der Rotation um eine Drehachse des Körpers von untergeordneter Bedeutung. Die Unsymmetrie liefert lediglich schwache Kopplungen, die mit $2\Omega t$ periodisch sind. Das System wird damit zur Parametererregung fähig. Nichtschwache Kopplungen erhält man für den praktischen Fall der Parametererregung einer zweiblättrigen Luftschraube, siehe [Gas02].

Dynamische Unwucht

In erster Näherung liefert die dynamische Unwucht ein Kippungsmoment, welches mit der Rotordrehzahl umläuft. In zweiter Näherung erfolgt eine umlaufende schwache Kopplung der Kippungen mit Drehschwingungen.

Störung der Symmetrie bezüglich der x - y -Ebene

Durch die Störung der Symmetrie ergeben sich schwache Kopplungen der Verlagerung in y -Richtung und der Kippung um die x -Achse bzw. der Verlagerung in x -Richtung und der Kippung um die y -Achse. Der Einfluss dieser Kopplungen auf die Eigenfrequenzen und die Eigenformen wird zusätzlich bestimmt durch das Verhältnis (J_a/mL^2) . Diese kann für beidseitig gestützte schlanke Rotoren bzw. Rotoren mit großem Abstand der Lager in erster Näherung vernachlässigt werden. Bei fliegend gelagerten Rotoren ist diese Kopplung nicht schwach. Damit sind diese System mit einem Modell der Modellgruppe 4 zu beschreiben. Jedoch ist eine Entkopplung der Gleichungen durch Einführung einer Hilfslänge analytisch möglich, siehe [Wal95]. Es entstehen zwei (modale) Ersatzsysteme der Modellgruppe 3 mit verschiedenen Hilfslängen, die einzeln untersucht werden müssen. Die Ersatzsysteme nähern sich bei verschwindender Asymmetrie entlang der Drehachse den Extremfällen mit unendlicher Hilfslänge (Modellgruppe 1) und Hilfslänge Null (Modellgruppe 2) an. Diese Ersatzmodelle haben den Freiheitsgrad drei bzw. zwei, wodurch die Lösung anschaulich wird. Es sind jedoch in jedem Fall vier Gleichungen zu lösen, womit der numerische Aufwand letztlich etwa gleich bleibt.

Translation in z

Die Translation in z -Richtung ist unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungsgrößen für alle angegebenen Rotormodelle von den übrigen Freiheitsgraden entkoppelt und wird formal in Modellgruppe 4 berücksichtigt.

2.2 Modelle gekoppelter Rotoren

2.2.1 Modellauswahl

Die Rotormodelle in Abs. 2.1.3 zeigen eine mögliche Systematik der Modellbildung auf. Das Ziel des folgenden Abschnitts ist es, geeignete Kombinationen von Rotormodellen zum System gekoppelter Rotoren zu verbinden. Die folgende Tab. 2.6 gibt beispielhaft einen Überblick über mögliche Kontaktpartner zu Modellen der Gruppe 1, Tab. 2.2 in Abs. 2.1, wobei die Modellbildung für die anderen Gruppen in gleicher Weise erfolgen

soll. Dabei nehmen die Komplexität und die Anzahl der Freiheitsgrade von oben nach unten zu. Damit korrespondieren auch die Möglichkeiten der Anwendung der Modelle. Diese führt von Grundlagenuntersuchungen zum Nachweis von Effekten an der Paarung elastisch gestützter Rotor gegen starre Halbebene bis hin zur Analyse des dynamischen Verhaltens realer Systeme an einer Paarung zweier elastisch gestützter Rotoren. Wird eine konstante Antriebsdrehzahl vorausgesetzt, verringert sich der Freiheitsgrad um eins.

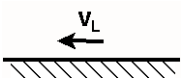
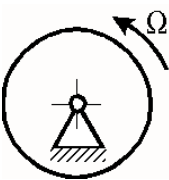
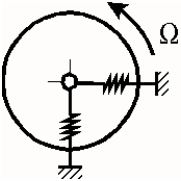
Kontakt-partner	Schema	Eigenschaften
unendliche starre Halbebene		<ul style="list-style-type: none"> - konstante Geschwindigkeit - raumfeste Lage der Kontaktebene - nur Kontaktschwingungen → für Grundlagenuntersuchungen zu Kontakt und Selbsterregung
starre Wal- ze		<ul style="list-style-type: none"> - veränderliche Umfangsgeschwindigkeit - raumfeste Drehachse - Kontaktschwingungen und Rollen → für Grundlagenuntersuchungen zu Kontakt und Selbsterregung mit Antriebsdynamik
elastisch gestützte Walze		<ul style="list-style-type: none"> - veränderliche Umfangsgeschwindigkeit - veränderliche Lage der Drehachse - gleich- und gegenphasige Schwingformen → Analysen am (modalen) Ersatzmodell realer Systeme mit wenigen Freiheitsgraden

Tabelle 2.6: Kontaktpartner im Modell gekoppelte Rotoren

Rotormodell

Für die Betrachtung des Systemverhaltens radial gekoppelter Rotoren werden Modelle der Gruppen 1 und 2 in Tab. 2.2 als zweckmäßig ausgewählt. Dass diese Betrachtung auch die typischen realen Systeme radial gekoppelter Rotoren erfasst, lässt sich wie folgt begründen:

- Walzenpaare in kontinuierlich arbeitende Anlagen (Druck- und Papiermaschinen, Transporteinrichtungen u.Ä.) haben oft einen symmetrischen Aufbau. Kleine Stö-

rungen der Symmetrie, die zwischen der Bedienerseite und der Antriebsseite durchaus vorhanden sind, können auf Grund der oftmals beträchtlichen Anlagenbreite vernachlässigt werden. Das bedeutet, die Verschiebungs- und die Kippschwingungen sind entkoppelt [HD94], [Gas02] und können unabhängig voneinander untersucht werden. Das System wird zerlegt in Teilsysteme der Gruppe 1 mit ausschließlich Verschiebungsfreiheitsgraden und der Gruppe 2 mit ausschließlich Kippfreiheitsgraden.

- Walzenpaare in Wicklern und Spulern sind oft fliegend gelagert, da diese Anordnung die technologisch notwendigen Wechsel des Wickels begünstigt. Das bedeutet, die Kippungen und Verschiebungen sind in den Eigenschwingformen gekoppelt. Es lassen sich jedoch (modale) Ersatzmodelle mit einem festen Verhältnis von Verlagerung und Kippung finden, welche die Eigenfrequenzen und Eigenformen mit der Kopplung zwischen Verschiebung und Kippung abbildet.

Damit ist eine gute Abbildung der tiefen Eigenfrequenzen und Eigenschwingformen realer Systeme beidseitig gestützter langer Walzen durch ein ebenes Modell und Systeme fliegend gelagerter Walzen mit einem räumlichen Modell ausschließlicher Kippfreiheitsgrade [Wal95] möglich. Im Sinne eines modalen Modells lassen sich das Minimalmodell bzw. seine Parameter aus Berechnungen zum dynamischen Verhalten mit einem komplexeren Modell bzw. durch die Anpassung an Messergebnisse ermitteln.

Minimalmodell

Für die Untersuchung des durch die Kopplung bestimmten dynamischen Verhaltens sind vor allem die Schwingformen von Interesse, die durch eine Bewegung der Walzen gegeneinander gekennzeichnet sind. Eine Beschränkung des Berechnungsmodells oder eines Versuchsstands bzw. einer Versuchsauswertung auf diese Schwingformen wird deshalb angestrebt. Eine erste Vereinfachung folgt zunächst aus folgender Betrachtung: Man ersetzt die zweite Walze in einem Walze-Walze Modell durch eine starr gelagerte Walze und vergrößert deren Radius und damit ihre Trägheit ins unendliche. Es entsteht als Kontaktpartner die mit konstanter tangentialer Geschwindigkeit bewegte unendliche Halbebene. Jede Eigenschwingform der ersten Walze gegen diese unendliche Halbebene ist gleichzeitig eine Kontaktschwingung. Dieses abstrakte Modell erleichtert grundsätzliche Untersuchungen des Kontaktverhaltens und der dadurch bestimmten gegenphasigen Schwingformen. Ein Versuchsstand, der diesen Bedingungen nahe kommt, ist in [Tro00] beschrieben. Eine zweite Möglichkeit, die gegenphasigen (Kontakt-) Schwingformen von den gleichphasigen zu entkoppeln, ergibt sich bei zwei absolut identischen

elastisch gestützten Walzen. Mit der Einführung von Summe und Differenz der Bewegungen der beiden Walzen als Relativkoordinaten gelingt für einige Systeme die Entkopplung der Kontaktbewegungen von den gleichphasigen Bewegungen für das ebene Modell. An Stelle von 6 Gleichungen müssen lediglich 3 Gleichungen zur Untersuchung der Kontaktschwingungen bei verschiedenen Defektparametern nach Tab. 2.3 benutzt werden. Das Kontaktverhalten im ebenen Modell der Walzenpaarung lässt sich in erster Näherung auf den Grenzfall Walze - unendliche starre Halbebene mit konstanter Geschwindigkeit zurückführen. Diese Reduzierung des Modells darf auch als Näherung bei der Berechnung realer Systeme gelten. Die dabei entstehende Ungenauigkeit kann mit dem Unterschied der Eigenfrequenzen der Teilsysteme bewertet werden. Wegen der unterschiedlichen Drehrichtung der Walzen und der damit verbundenen entgegengesetzten Richtung der Kreismomente gelingt diese Entkopplung nicht für die Modelle der Gruppe 2 in Tab. 2.2. Jedoch ist auch hier die Einführung von Summe und Differenz der entsprechenden Walzenkoordinaten zur Beschreibung von gleich- und gegenphasigen Bewegungen günstig, da der Einfluss von Parametern auf die Kopplung der Koordinaten sowie auf das dynamische Verhalten in den Gleichungen deutlich hervor tritt.

2.2.2 Koordinatensysteme und Bezugslagen

Die Bewegung der beiden Rotoren wird in jeweils einem raumfesten Koordinatensystem gemäß Abs. 2.1 beschrieben. Diese werden so gewählt, dass in der Bezugslage zur Kontaktbeschreibung gilt:

- Beide Rotoren berühren sich kraftfrei entlang einer Linie.
- Dabei zeigt z jeweils in Richtung der Drehachse und definiert den positiven Drehsinn der Rotation.
- Die y -Richtung zeigt jeweils von der Rotordrehachse in Richtung der Kontaktlinie.
- Die x -Koordinate weist jeweils entgegen der möglichen Durchlaufrichtung eines Gutes durch den Kontaktpalt (Nip).

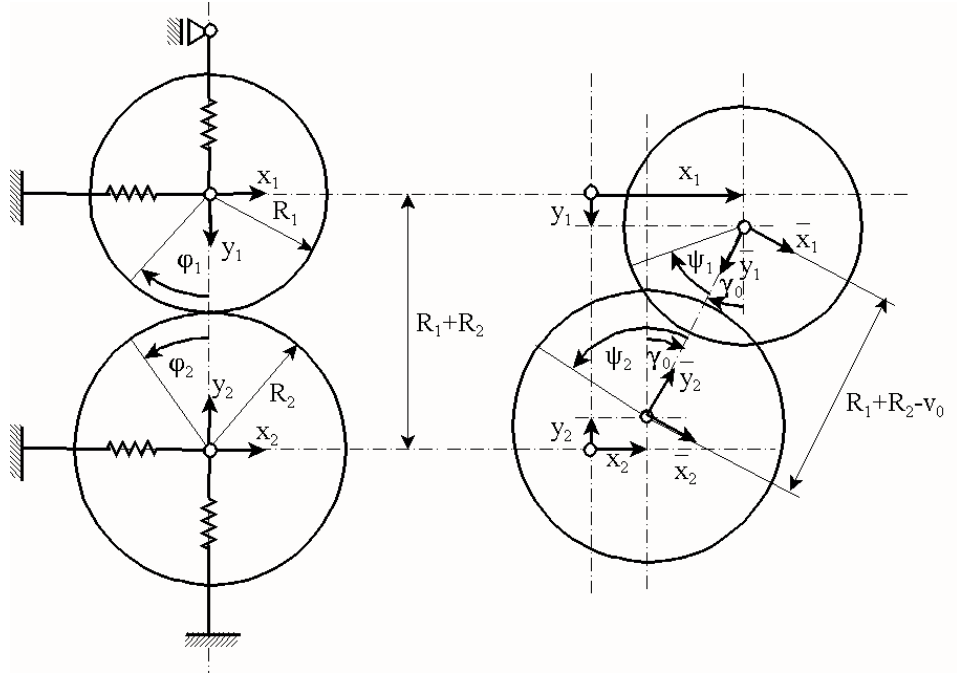


Abbildung 2.2: Bezugslage (links) und ausgelenkte Lage (rechts) mit Kontaktkoordinaten der radial gekoppelten Rotoren

Zu dieser raumfesten Bezugslage wird weiter eine stationäre Lage der gekoppelten Rotoren unter der Wirkung einer Kontaktkraft als radiale Vorspannkraft der Rotoren gegeneinander bei konstanter Drehzahl bzw. Drehgeschwindigkeit der Rotoren bezeichnet. Die Auslenkung der Rotoren in der stationären Lage gegenüber der lastfreien Bezugslage führt, kleine Auslenkungen vorausgesetzt, auf die Kontaktgrößen

$$\begin{aligned} v_0 &= y_1 + y_2 \\ \gamma_0 &= \frac{x_1 - x_2}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet v_0 eine Annäherung der beiden Rotordrehachsen und γ_0 die Neigung der Kontaktlinie (Verbindung der beiden Drehachsen) gegenüber der Bezugslage, siehe Abb. 2.2. Daraus folgen die Drehwinkel der beiden Rotoren gegenüber der Kontaktlinie

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 - \gamma_0 \\ \psi_2 &= \varphi_2 + \gamma_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Eine Verdrehung der beiden Rotoren gegeneinander in der Kontaktstelle folgt aus der Abrollbedingung der Rotoren unter Berücksichtigung lokaler Verformungen im Kontakt und kann nicht ausschließlich aus den hier angegebenen globalen Auslenkungen der Rotoren ermittelt werden.

2.2.3 Kontaktkraftmodell

Die Beschreibung der Wechselwirkung der beiden Rotoren im Kontakt erfolgt über die Kontaktspannungen. In einem kontaktfesten Koordinatensystem werden Kontaktspannungen entlang der Kontaktlinie als Normalspannungen und senkrecht zur Kontaktlinie als Tangentialspannungen bezeichnet. Die Normalspannungen sind immer Druckspannungen und zeigen auf die Kontaktfläche. Die Tangentialspannungen zeigen in Richtung der Kontaktfläche und sind als positive Spannungen definiert, wenn dadurch der angetriebene Rotor gebremst und der geschleppte Rotor beschleunigt wird. Den Vereinfachungen folgend, wird ein ebenes Kontaktmodell betrachtet.

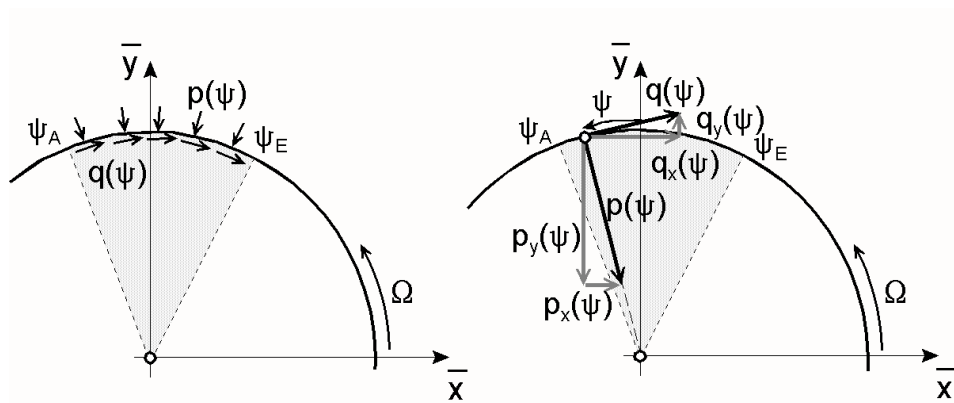


Abbildung 2.3: Komponenten der Kontaktspannungen an der unverformbaren Walze in Kontakttrichtung und in Umlaufrichtung

Die resultierenden Kontaktkräfte folgen aus der Integration der Kontaktspannungen (Oberflächenspannungen) über dem Kontaktgebiet in Richtung \bar{y} als Normalkraft F_N und in \bar{x} -Richtung als Tangentialkraft F_T . Das Moment M der Kontaktspannungen auf den jeweiligen Rotor folgt aus der Integration der Kontaktspannungen und ihres Hebelarms bezüglich der Drehachse des jeweiligen Rotors. Diese Verhältnisse sind im folgenden Abb. 2.3 für den Fall eines unverformbaren Rotors angegeben.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 F_N &= \int_{\psi_E}^{\psi_A} [p(\psi)\cos(\psi) + q(\psi)\sin(\psi)] R d\psi \\
 F_T &= \int_{\psi_E}^{\psi_A} [q(\psi)\cos(\psi) - p(\psi)\sin(\psi)] R d\psi \\
 M &= \int_{\psi_E}^{\psi_A} q(\psi) R^2 d\psi
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Für den Fall des verformbaren Rotors ist zusätzlich die Richtung der Kontaktfläche zu berücksichtigen. Es gilt eine Zerlegung der Kontaktkräfte

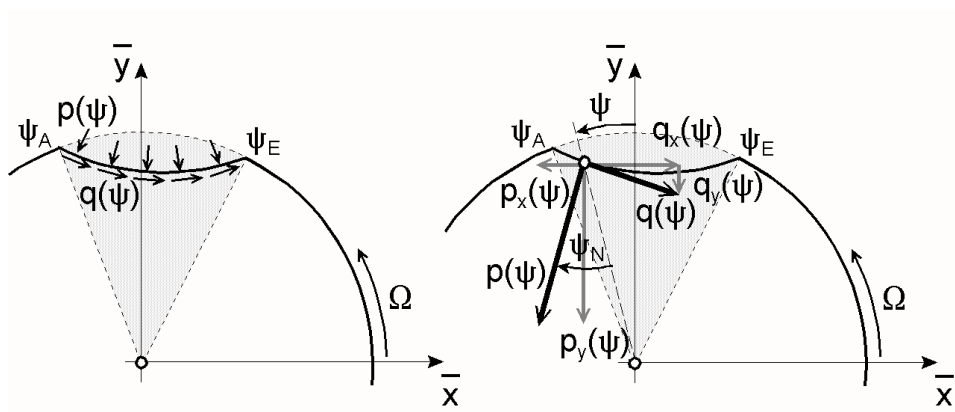


Abbildung 2.4: Komponenten der Kontaktspannungen an der verformbaren Walze in Kontakttrichtung und in Umlaufrichtung

Zum Winkel ψ kommt noch die Neigung der Kontaktfläche ψ_N hinzu, siehe Abb. 2.4. Damit lauten die Beziehungen (2.5) an der verformten Walze

$$\begin{aligned}
 F_N &= \int_{\psi_E}^{\psi_A} [p(\psi)\cos(\psi - \psi_N) - q(\psi)\sin(\psi - \psi_N)] R d\psi \\
 F_T &= \int_{\psi_E}^{\psi_A} [q(\psi)\cos(\psi - \psi_N) + p(\psi)\sin(\psi - \psi_N)] R d\psi
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Für das Moment liefert die Zerlegung der Kontaktspannungen in radiale und tangentiale

Komponenten:

$$M = - \int_{\psi_A}^{\psi_E} [R + v(\psi)][q(\psi)\cos(\psi_N) - p(\psi)\sin(\psi_N)]Rd\psi \quad (2.7)$$

Die Integration der Kontaktspannungen über der Kontaktzone liefert die Kontaktkräfte und das Kontaktmoment in den Bewegungsgleichungen der gekoppelten Rotoren.

2.2.4 Selbsterregungsmechanismen gekoppelter Rotoren

In Stabilitätsbetrachtungen an Rotorsystemen nach den Kontaktfällen 1 und 2 findet man zum Einen reibungsbedingte Instabilität und zum Anderen wiederholungsbedingte Instabilität durch regenerative Effekte. Die folgende Tabelle 2.7 gibt einen Überblick über typische Merkmale dieser Selbsterregungsmechanismen.

	reibungsbedingte Instabilität (Wickler)	wiederholungsbedingte Instabilität (Papier-, Druckmaschine)
Selbsterregungseffekt	Energieabfuhr in erster Halbschwingung ist kleiner als Energiezufuhr in zweiter Halbschwingung	Regeneration durch wiederholte Verformung bei jeder Umdrehung
Beschreibung	Gleiten: Reibkennlinie $F_T = -\text{sign}(\dot{u})\mu F_N$ Haften: $\dot{u} = 0$ und $ F_T \leq \mu_0 F_N$	Differenzial-Differenzengleichung $\dot{x}(t) = G(x(t), S(x(t - T)))$ mit Verzögerungsfunktion $S(x(t - T))$

Tabelle 2.7: Selbsterregungsmechanismen gekoppelter Rotoren

Instabilität durch Gleitreibung

Kennzeichnend für diese Art der Selbsterregung ist die Wechselwirkung von Energieentzug und Energiezufuhr in den Halbschwingungen einer Eigenschwingung durch eine wechselnde Gleitreibungskraft zwischen den Kontaktpartnern. Wird dabei die zugeführte Energie größer als die abgeführte Energie, klingt die Schwingung schnell auf [MP02], [Bro95], [Wal95].

Mit der Beziehung für die Reibarbeit

$$W_R = \int F_R \dot{x} dt = \int_t^{t+T} -\mu(\dot{u}) F_N(x, \dot{x}) \text{sign}(\dot{u}) \dot{u} dt \quad (2.8)$$

werden zwei mögliche Quellen dieses Effekts deutlich:

1. Eine fallende Reibkennlinie erzeugt eine mit wachsender Relativgeschwindigkeit abnehmende Reibkraft [MP02]. Dieser Effekt kann zu einer negativen Dämpfung des Systems und damit zur Anfachung von Schwingungen führen.
2. Die Kopplung von Tangential- und Normalkomponenten durch geneigte Steifigkeitshauptachsen [Bro95] oder durch Kreismomente [Wal95] transportiert Energie aus der Normalschwingung in die Reibschwingung und umgekehrt, wodurch das Anfachen von Schwingungen möglich wird. Dieses Phänomen ist z.B. als *Lagekopplung* bei Werkzeugmaschinen bekannt.

Instabilität durch regenerative Effekte

Diese Art der Selbsterregung des Systems kann mit Einführung einer weiteren Verformungsgröße, die - um eine Umlaufdauer $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega_2}$ verzögert - an der Kontaktstelle wirkt, erfasst werden. Bekannt sind derartige Beziehungen aus Untersuchungen zum Werkzeugrattern. Mögliche Verformungsgrößen können aus Betrachtungen zum Verschleiß [Lan01], zur Plastifizierung an der Kontaktstelle [Gru97] u. ä. ermittelt werden. Als typische Effekte bei der Verformung einer viskoelastischen Schicht im rollenden Kontakt ermöglicht das in Abs. 2.3 hergeleitete Kontaktgesetz die Erfassung dreier wesentlicher Effekte, die die Ausbildung einer Welligkeit des Walzenbelages auf Grund eines regenerativen Effekts erklären:

- die Restverformung bei Austritt bzw. Wiedereintritt des Belags in die Kontaktzone,
- die Ausdehnung des Belags aufgrund der Erwärmung durch Dissipation bei Kontaktdurchlauf,
- zeitveränderliche Werkstoffparameter wegen ihrer Temperaturabhängigkeit.

Die Modellierung dieser drei Effekte kann dabei in ähnlicher Weise erfolgen. Zur besseren Veranschaulichung wird ein Schichtelement $BhRd\varphi$ verfolgt. Beim Durchlauf durch die Kontaktstelle wird das Schichtelement verformt, dabei wird durch innere Reibung

Energie dissipiert, d.h. in Wärme umgewandelt. Nach dem Austritt aus der Kontaktstelle hat das Schichtelement gegenüber dem Eintritt in die Kontaktstelle eine Restverformung und eine höhere Temperatur, die zu einer Ausdehnung des Schichtelements und zu einer Änderung seiner Materialparameter führen können.

Im folgenden lastfreien Umlauf des Schichtelements nimmt die Restverformung ab (Relaxation) und es wird Wärme an die *Umgebung* (umgebende Luft, Stahlkern und benachbarte Schichtelemente) abgeführt. Beim folgenden Wiedereintritt in die Kontaktstelle werden die um einen Verlustbetrag verminderten Größen Restverformung, Temperaturdehnung und Parameteränderung erneut wirksam.

2.3 Kontaktmodell

2.3.1 Voraussetzungen und Annahmen

Zum Kontakt zylindrischer Körper existiert eine Vielzahl an wissenschaftlichen Arbeiten, die ihren Ursprung in der Theorie zum elastischen Kontakt zylindrischer Körper haben. Arbeiten zum rollenden Kontakt unter Benutzung der Halbraumbedingung [Buf61] knüpfen direkt daran. Mit der Entwicklung leistungsfähiger numerischer Methoden wurden die analytischen Ansätze verfeinert und die Verhältnisse im Kontaktbereich detaillierter beschrieben und auch berechnet [Kal73], [KB98], [WK88]. Den Schwerpunkt dieser Arbeiten bildete die Analyse der Verformungen und Spannungen im Kontakt bei einem stationären Betriebszustand.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung dynamischer Vorgänge an radial gekoppelten Rotoren. Das heißt, Schwerpunkte sind die Analyse und Simulation der Bewegungen radial gekoppelter Rotoren bei verschiedenen Betriebszuständen. Für die Koppelstelle zwischen den Rotoren genügt dabei ein Modell der Kontaktstelle, welches die Wirkung der Kontaktkräfte auf die Kontaktpartner als integrale Größe der lokalen Kontaktgrößen in guter (erster) Näherung wiedergibt und dessen Parameter sich einfach mit Versuchsergebnissen abgleichen lassen. Die getroffenen Annahmen sind notwendig zur analytischen Entwicklung des Kontaktmodells und lassen sich aus einer ingenieurgemäßen Analyse der betrachteten Systeme begründen, zeigen aber auch die Unzulänglichkeiten des Modells.

Als Referenzzustand wird die parallele Kopplung zweier idealer Zylinder festgelegt. Die Kontaktzone beim stationären Rollen hat die Form eines Rechtecks mit der Breite B und der Länge $2a_K$. Zur Herleitung eines Kontaktmodells soll der Fall betrachtet werden, dass eine Stahlwalze im Kontakt mit einer polymerbeschichteten Stahlwalze betrieben wird. Möglichkeiten der Spezialisierung bzw. der Verallgemeinerung des Kontaktmodells

werden im Anschluss diskutiert.

Einige Eigenschaften des Walzenbelages werden in der folgenden Betrachtung ausgenutzt. Diese sind:

- Der Belag ist *weich* gegenüber dem Walzenmaterial.
- Das Belagmaterial ist mit der Oberfläche des Walzenkörpers *verklebt*.
- Die Belagdicke ist *dünn* gegenüber dem Radius der Walze.
- Der Belag ist *homogen* auf dem Mantel des Walzenkörpers verteilt.

Werden die Betrachtungen auf langgestreckte Rotoren beschränkt (Walzen, keine Scheiben), kann die Gültigkeit eines ebenen Formänderungszustands angenommen werden. Randeffekte werden dabei vernachlässigt.

Kontaktkinematik

Für das kinematische Modell der Kontaktschicht führen die Annahmen zu den folgenden Vereinfachungen:

- Die Verformung des Walzenkerns ist klein gegenüber der Verformung des Belags.
- Die Verformung des Walzenbelags ist klein gegenüber der Belagdicke.
- Es gilt die Bedingung: *Haften* zwischen Walzenkern und Belag.
- Es gilt entweder die Bedingung: *Haften* oder die Bedingung: *Gleiten* an der Kontaktstelle zwischen Belagoberfläche und Gegenwalze.

Anders ausgedrückt, können diese Annahmen zur Vereinfachung des lokalen Kontaktproblems angewendet werden. Es gilt die Linearisierung für kleine Verformungen eines Zylinders an der Kontaktstelle:

$$\frac{v_i}{R_i} = \varepsilon_i \ll 1 \quad (2.9)$$

Mit der Näherung der Kontaktlänge a_K durch die Überdeckung der beiden Zylinder, bezogen auf die beschichtete Walze 2

$$-a_K \leq \psi_2 R_2 \leq a_K ; a_K^2 = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2} v_0 = 2R_0 v_0 \quad (2.10)$$

ist mit

$$\psi_2^2 = 2 \frac{R_0}{R_2} \frac{v_0}{R_2} = 2 \frac{R_0}{R_2} \varepsilon_2 \ll 1 \quad (2.11)$$

eine weitere kleine Größe definiert, die zur Vereinfachung ausgenutzt wird.

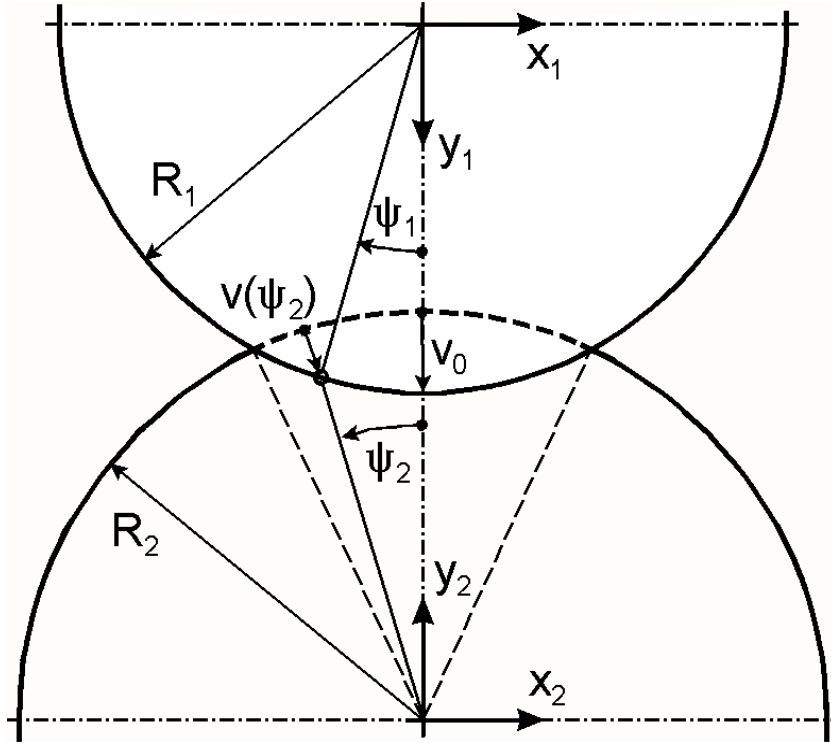


Abbildung 2.5: Kontaktkinematik (vereinfacht)

Unter Ausnutzung der kleinen Größen in Gl. (2.10) und Gl. (2.11) für gegebene globale Verschiebungen (v_0, u_0) an der Kontaktstelle in normaler und tangentialer Richtung können Polynome niedrigen Grades als Ansatzfunktionen für die lokalen Verschiebungen (v, u) an der Walzenoberfläche über der Kontaktlänge entwickelt werden, die die kinematischen Bedingungen in der Näherung erster Ordnung erfüllen.

Totales Haften

Ausgangspunkt der Herleitung ist die Betrachtung der Kontaktstelle zu einem Zeitpunkt t , in welchem sich materielle Punkte der Kontaktpartner entlang der Kontaktlinie gemeinsam bewegen. Diese haben deshalb die selbe Lage und die selbe Geschwindigkeit im kontaktfesten Koordinatensystem. Es gilt für die Punktlage

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -R_1 \sin(\psi_1) \\
 y_1 &= R_1 \cos(\psi_1) \\
 x_2 &= -(R_2 - v(\psi_2)) \sin(\psi_2) + u(\psi_2) \cos(\psi_2) \\
 y_2 &= (R_2 - v(\psi_2)) \cos(\psi_2) + u(\psi_2) \sin(\psi_2)
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

und für die Punktgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\Omega_1 R_1 \cos(\psi_1) \\
 \dot{y}_1 &= -\Omega_1 R_1 \sin(\psi_1) \\
 \dot{x}_2 &= \Omega_2 [v' \sin(\psi_2) - (R_2 - v) \cos(\psi_2) + u' \cos(\psi_2) - u \sin(\psi_2)] \\
 \dot{y}_2 &= \Omega_2 [-v' \cos(\psi_2) - (R_2 - v) \sin(\psi_2) + u' \sin(\psi_2) + u \cos(\psi_2)]
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Weiter werden die Zwangsbedingungen für Punktlage und -geschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 x_1 - x_2 &= 0 \\
 y_1 + y_2 &= R_1 + R_2 - v_0 \\
 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 &= 0 \\
 \dot{y}_1 + \dot{y}_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

und die Beziehung für den Rollwinkel an der starren Walze berücksichtigt

$$\begin{aligned}
 x_1^2 + y_1^2 &= R_1^2 \\
 \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 &= \Omega_1^2 R_1^2
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Aus (2.14) und (2.15) folgen nach Quadrieren und Einsetzen der Lagebeziehungen (2.12) und (2.13) Gleichungen, die nur noch Bewegungs- und Deformationsgrößen der verformbaren Walze und die Geometrie der starren Walze enthalten:

$$\begin{aligned}
 0 &= (R_2 - v_0)^2 + 2R_1(R_2 - v_0) + y_2^2 - 2(R_1 + R_2 - v_0)y_2 + x_2^2 \\
 R_1^2 \Omega_1^2 &= \Omega_2^2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Durch Normierung mit R_2 als Bezugslänge lassen sich kleine Größen nach Gl. (2.10) und (2.11) ausklammern und die Gleichungen (2.16) kann durch Linearisierung vereinfacht werden. Unter Ausnutzung eines kleinen Kontaktwinkels ψ_2 und Einsetzen der bekannten Näherungspolynome für die Sinus- und Kosinusfunktion entstehen weitere Produkte kleiner Größen, die vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{v_0}{R_2} + \psi_2^2 \frac{R_2 + R_1}{2R_1} - \frac{v(\psi_2)}{R_2} + \frac{u(\psi_2)}{R_2} \psi_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \\
 1 - \left(\frac{R_1 \Omega_1}{R_2 \Omega_2} \right)^2 &= 2 \frac{v(\psi_2)}{R_2} + 2 \frac{u'(\psi_2)}{R_2}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Mit einem quadratischen Polynomansatz für die Verschiebungen

$$\begin{aligned}
 v/R_2 &= b_0 + b_1\psi_2 + b_2\psi_2^2 \\
 u/R_2 &= a_0 + a_1\psi_2 + a_2\psi_2^2 \\
 v'/R_2 &= b_1 + 2b_2\psi_2 \\
 u'/R_2 &= a_1 + 2a_2\psi_2
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

folgt durch Einsetzen von (2.18) in die Bedingungen (2.17)

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\frac{v_0}{R_2} - b_0 \right) + \left(a_0 \frac{R_1 + R_2}{R_1} - b_1 \right) \psi_2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1} + a_1 \frac{R_1 + R_2}{R_1} - b_2 \right) \psi_2^2 \\
 \left(\frac{R_1\Omega_1}{R_2\Omega_2} \right)^2 &= (1 - 2a_1 - 2b_0) - (4a_2 + 2b_1) \psi_2 - 2b_2\psi_2^2
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert unter Beibehaltung der Terme erster Ordnung die Polynome für die Kontaktlinie

$$\begin{aligned}
 \frac{v}{R_2} &= \frac{v_0}{R_2} + \frac{u_0}{R_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \psi_2 - \frac{1}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \psi_2^2 \\
 \frac{u}{R_2} &= \frac{u_0}{R_2} + a_1\psi_2
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

und für die tatsächliche Rollgeschwindigkeit in der Kontaktstelle

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{R_1\Omega_1}{R_2\Omega_2} \right)^2 &= 1 - 2a_1 - 2b_0 \\
 \frac{R_1\Omega_1}{R_2\Omega_2} &= 1 - a_1 - b_0
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Nach Multiplikation mit R_2 für die Verschiebungen u und v und der Einführung einer Bogenkoordinate s bezüglich der Walzenoberfläche

$$s_2 = -R_2\psi_2 \tag{2.22}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned}
 v(s_2) &= v_0 - u_0 \frac{s_2}{R_0} - \frac{s_2^2}{2R_0} \\
 u(s_2) &= u_0 - \delta s_2
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

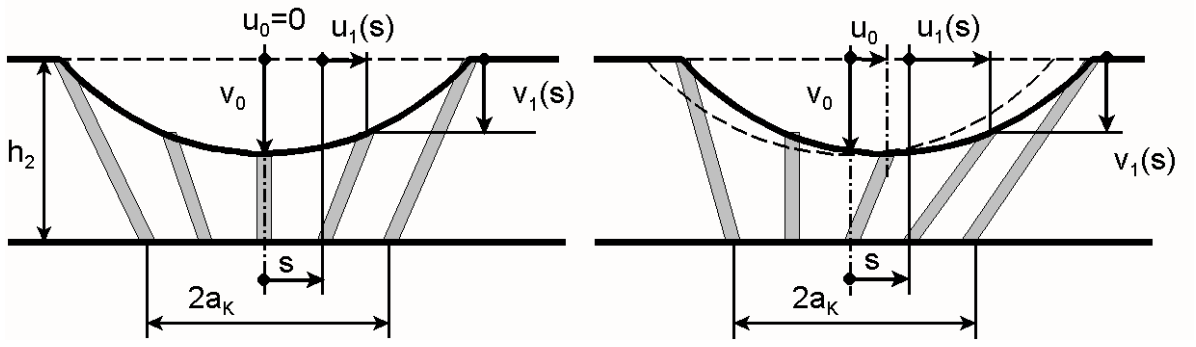


Abbildung 2.6: Kontaktkinematik (linearisiert)

Mit einer dimensionslosen Koordinate

$$\xi_K = \frac{s_2}{a_K} \quad (2.24)$$

mit der geometrischen Kontaktlänge a_K

$$a_K^2 = 2R_0v_0 \quad (2.25)$$

und dem reduzierten Kontaktradius R_0

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.26)$$

lassen sich durch Ausklammern kleiner Größen die Beziehungen weiter Vereinfachen

$$\begin{aligned} \frac{v(\xi_K)}{h} &= \frac{v_0}{h} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{u_0}{a_K} \xi_K - \xi_K^2 \right) \approx \frac{v_0}{h} (1 - \xi_K^2) \\ \frac{u(\xi_K)}{a_K} &= \frac{u_0}{a_K} - \delta \xi_K \end{aligned} \quad (2.27)$$

Diese Beziehungen für die lokalen Verschiebungen in Abhängigkeit von den globalen Verschiebungen erfüllen die kinematischen Bedingungen in erster Näherung. Der Freiwert δ für die Verschiebung in tangentialer Richtung ist abhängig vom Querdehnungsverhalten des Werkstoffs. Bei inkompressiblen Schichtwerkstoffen wird Material aus dem Kontaktbereich nach außen *verdrängt*. Es muss sich demzufolge eine lokale Deformation in tangentialer Richtung einstellen, die über das Kompressions- oder Querdehnungsverhalten mit der Verschiebung in normaler Richtung gekoppelt ist.

Wird diese Herleitung unter der Annahme kleiner zeitabhängiger Störungen der globalen Verschiebungen in radialer und tangentialer Richtung durchgeführt, so führt diese auf das gleiche Ergebnis wie die nachträgliche Berücksichtigung dieser Störungen in der

Führungsgeschwindigkeit. Das gilt unter der Voraussetzung, dass auch die zeitlichen Änderungen dieser Störungen klein gegenüber der Rollgeschwindigkeit bleiben.

Totales Gleiten

Im Fall Gleiten gilt, dass sich materielle Punkte beider Kontaktpartner nur entlang der Kontaktlinie bewegen können, jedoch zum Zeitpunkt t mit verschiedenen Geschwindigkeiten der Schichtoberfläche und der Oberfläche der Stahlwalze. Die kinematische Näherungslösung (2.27) aus dem Fall Haften für die Lage der Punkte in der Kontaktzone gilt weiter. In tangentialer Richtung gilt die Bedingung (2.28).

$$q = -\mu p \operatorname{sign}(\dot{u}) \quad (2.28)$$

Das heißt, für den Fall Gleiten sind gekoppelte Bedingungen für Kräfte und Verschiebungen in der Kontaktzone bekannt, die zumeist iterativ gelöst werden müssen.

2.3.2 Stoffgesetz - Werkstoffmodell

Zahlreiche Theorien zum rollenden Kontakt zylindrischer Körper führen bereits bei Ermittlung der stationären Lösung zu aufwändigen numerischen Berechnungen. Damit wird ein Herausarbeiten des Zusammenhangs zwischen dem dynamischen Verhalten des Walzenpaares und den Eigenschaften der Schicht erschwert. Andererseits existieren zur Berechnung des dynamischen Verhaltens von Kraftfahrzeugen gut handhabbare Reifen- bzw. Radmodelle, die den Reifen (bzw. das Rad) aus *Borsten*, d.h. Streifenelementen zusammensetzen.

In Anlehnung an diese Untersuchungen soll ein Streifenmodell des Walzenbelags erarbeitet werden, dessen Modellparameter aus den Werkstoffparametern abgeschätzt bzw. mit Hilfe einfacher Rollversuche direkt ermittelt werden können.

Werkstoffmodell in radialer Richtung

Für das einfache Borstenmodell der Schicht sollen die Schichtelemente (Borsten) lediglich in radialer Richtung (bzw. in Normalenrichtung der Kontaktfläche) Verschiebungen erfahren können. Verschiebungen und Kräfte in tangentialer Richtung werden zunächst nicht betrachtet.

Die Formulierung viskoelastischer Stoffgesetze ist im Frequenzbereich mit komplexen Moduln einfach und an übliche experimentelle Verfahren angepasst. Für die dynamischen Untersuchungen zum Rollkontakt ist eine Beschreibung im Zeitbereich notwendig. Eine praktikable Formulierung des Stoffgesetzes erfolgt mit inneren Variablen, deren

Parameter aus den komplexen Moduln entwickelt werden.

Zur phänomenologischen Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens im Zeitbereich stehen mit dem Voigt-Kelvin-Modell und dem Maxwell-Modell zwei Grundkörper zur Verfügung. Eine Betrachtung der Eigenschaften dieser Modelle bei dynamischer Belastung zeigt auch deren Unzulänglichkeiten bzw. Beschränkungen auf Fluide bzw. Festkörper. Eine Kombination der Grundkörper führt zum Maxwell- bzw. Poynting-Modell. Beide Modelle besitzen zwei elastische Grenzfälle bei dynamischer Belastung.

Der Unterschied ist die Addition von Steifigkeiten beim Maxwell-Körper (Parallelschaltung) und von Nachgiebigkeiten beim Poynting-Körper (Reihenschaltung). Durch Hinzufügen weiterer Feder-Dämpfer-Kombinationen entsprechend der Grundkörper sind diese verallgemeinerbar und können an reales viskoelastisches Materialverhalten angepasst werden.

Belastung	statisch	impulsförmig
Kelvin-Voigt-Modell	$k = k$	$k = 0$
Maxwell-Modell	$k = 0$	$k = k$
erweitertes Kelvin-Voigt Modell (Poynting-Modell)	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1}$
erweitertes Maxwell-Modell	$k = k_1$	$k = k_1 + k_2$
generalisiertes Kelvin-Voigt Modell	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_N}$	$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1}$
generalisiertes Maxwell-Modell	$k = k_1$	$k = k_1 + k_2 + \dots + k_N$

Tabelle 2.8: Grenzfälle der Belastung und Eigenschaften der viskoelastischen Grundkörper

Das verallgemeinerte Maxwell-Element ist für die Untersuchungen mit gegebener Kontaktkinematik die geeignete Formulierung des viskoelastischen Stoffgesetzes. Bei gegebenen Kräften und unbekannten Verformungen ist das generalisierte Kelvin-Voigt-Modell die geeignete Formulierung des viskoelastischen Stoffgesetzes.

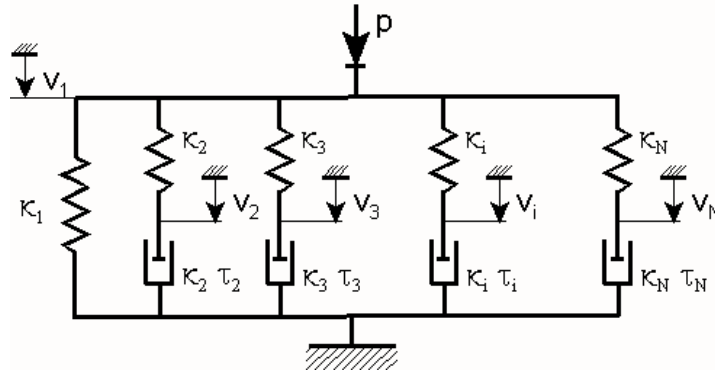


Abbildung 2.7: Verallgemeinertes Maxwell-Modell zur Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens

Das verallgemeinerte Maxwell-Element folgt durch die Parallelschaltung von Maxwell-Körpern mit der Bewegungsgleichung mit inneren Variablen

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 \tau_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_K \tau_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_K & -\kappa_2 & \cdots & -\kappa_K \\ -\kappa_2 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\kappa_K & 0 & \cdots & \kappa_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

mit einem endlichen diskreten Relaxationszeitepektrum zwischen den Extremwerten

$$\tau_1 \rightarrow \infty; \tau_K \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

wird eine hinreichend genaue Näherung des Werkstoffverhaltens ermittelt.

Konstitutive Beziehung

Werden nun der Kontaktdurchlauf und der freie Umlauf des Schichtelements als aufeinander folgende Vorgänge betrachtet, so gilt im Kontaktdurchlauf unter Beachtung der Kontaktkinematik Gl. (2.27) eine Verschiebungsrandbedingung bei gesuchter Kontaktkraft am Schichtelement. Die Gl. (2.30) bekommt folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \tau_k \dot{v}_k + v_k &= v_1; k = 2, \dots, K \\ p &= \kappa_1 v_1 + \sum_{k=2}^K \kappa_k (v_1 - v_k) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Es bleiben lediglich $(K - 1)$ unabhängige Differenzialgleichungen erster Ordnung übrig, deren Lösungen die inneren Variablen sind. Als Lösung der algebraischen Gleichung erhält man die lokale Kontaktkraft bzw. die Pressung zwischen den Walzen. Die Kontaktlänge folgt aus den Nullstellen der Pressung.

Im freien Umlauf gilt eine Spannungsrandbedingung bei gesuchter Verschiebung am Schichtelement. Aus der Beziehung (2.30) folgt das homogene Differenzialgleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 \tau_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_K \tau_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_K & -\kappa_2 & \cdots & -\kappa_K \\ -\kappa_2 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\kappa_K & 0 & \cdots & \kappa_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

dessen Lösung das exponentielle Abklingen der Restverformungen im freien Umlauf beschreibt. Die Kontaktgleichungen (2.31) und (2.33) werden zunächst in einer materiellen Betrachtungsweise formuliert, d.h. sie geben an, welche Verformungen bzw. welche Kräfte ein Schichtelement während eines Umlauf erfährt. Zur Untersuchung des Kontaktverhaltens zwischen den beiden Rotoren ist es dann notwendig, in einer räumlichen Betrachtung die lokalen Kontaktkräfte aller zum Zeitpunkt t in der Kontaktzone befindlichen Schichtelemente zu ermitteln und durch Integration (Summation) über diese lokalen Kontaktkräfte die globale Kontaktkraft zwischen den Walzen zu berechnen. Für das dreiparametrische Modell liefert dies

$$F_N(v_0, \Omega_2) = \frac{4}{3} \kappa_{N1} \sqrt{2R_0} v_0^{3/2} + 2\kappa_{N2} (R_2 \Omega_2 \tau_2)^2 \left[\sqrt{v_0/2R_0} \left(1 + \exp \left(\frac{-2\sqrt{2R_0} v_0}{R_2 \Omega_2 \tau_2} \right) \right) - \frac{R_2 \Omega_2 \tau_2}{R_0} \right] \quad (2.33)$$

Die Kontaktsteifigkeit folgt aus der Linearisierung dieser Gleichung (2.33) im Arbeitspunkt (v_0, Ω) , der durch die Vorspannung des Systems gegeben ist.

Erweiterung des Werkstoffmodells in tangentialer Richtung

Zusätzlich zur Druck-Beanspruchung soll der Belag bei Kontaktdurchlauf auf Scherung beansprucht werden. Dies geschieht lokal bereits im tangentialkraftfreien Rollen bei inkompressiblen Schichtwerkstoffen durch das Herauspressen von Material aus der Kon-

taktstelle (Nip).

Die Kontaktkinematik liefert eine Beziehung für den Fall *totales Haften* mit dem Freiwert δ . Dieser freie Parameter hängt ab vom Kompressionsverhalten des Schichtwerkstoffs und kann abgeschätzt werden für inkompressibles Material mit

$$\delta \approx \frac{v_0}{h} \quad (2.34)$$

Die Aufstellung einer exakten lokalen Tangentialkraft-Verformungsbeziehung ist mit Hilfe des gewählten Streifenmodells nicht möglich. Die kinematischen Beziehungen im Kontakt können zwar erfüllt werden, jedoch nicht die Bedingung der Volumenkonstanz eines Schichtelements bei Durchlaufen der Kontaktstelle. Dazu ist eine Diskretisierung der Schicht in radialer Richtung (Mehrschichtmodell bzw. geeignete Ansatzfunktionen) notwendig, siehe [Lab02].

Um dennoch eine Abschätzung der tangentialen Kraft-Verformungs-Beziehung der Kontaktschicht in einer resultierenden tangentialen Kontaktkraft zu erhalten, wird unter Berücksichtigung von Ergebnissen zum stationären Rollkontakt [Möh93] benutzt, dass die lokalen tangentialen Kontaktkräfte aus der Querverformung der Schicht im Leerlauf keine resultierende Tangentialkraft liefern. Zur Abschätzung der Tangentialkraft genügt letztlich die Berücksichtigung der den lokalen Querverformungen aus dem Kompressionsverhalten überlagerten globalen Verformung u_0 . Diese Tangentialkraftbetrachtung wird im Weiteren lediglich in der Ermittlung von Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen benutzt.

Abschließend werden kleine Abweichungen von der Ausgangskinematik betrachtet, die zu einer Veränderung der Kontaktfläche unter Berücksichtigung des stationären rollenden Kontakts führen. Diese sind:

- eine ungleichmäßige Anpressung (gegeneinander Nicken) und
- eine Schränkung (gegeneinander Gieren) der Zylinder.

Ungleichmäßige Anpressung

Eine ungleichmäßige Anpressung führt zu einer Abhängigkeit

$$v = v_0 + v_1 z / L \quad (2.35)$$

entlang der Walze. Nach Gleichung (2.10) folgt daraus eine korrigierte Kontaktlänge

$$a_K(z) = \sqrt{2R_0(v_0 + v_1 z / B)} \approx \sqrt{2R_0 v_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_1}{v_0} \frac{z}{B} \right) \quad (2.36)$$

Das heißt in erster Näherung wird die Kontaktfläche ein Trapez. Eine maximale Abweichung dieser Näherung vom tatsächlichen Wert von 1% wird für $v_1 \leq \frac{1}{4}v_0$ eingehalten. Eine gleichmäßige Anpressung der Walzen im Ausgangszustand vorausgesetzt, werden Nickbewegungen der Walzen gegeneinander mit einem in z -Richtung geschichteten Kontaktmodell gut erfasst.

Schräglage der Walzen

Die Schräglage der Walzen um den Winkel β_W führt zu einer Änderung des im Kontakt wirksamen Radius der Walzen. Durch Linearisierung der kinematischen Beziehungen an Ellipsen als Schrägschnitt des Zylinders kann für den wirksamen Radius die Beziehung für kleine Winkel β_W angegeben werden.

$$r(\beta_W) = R(1 + \beta_W^2); \beta_W \ll 1 \quad (2.37)$$

Diese zeigt bis zu einer Schrägstellung von $\beta_W=12^\circ$ einen Fehler von weniger als 0,1%. Bei Vernachlässigung der Radienänderung wird dieser Fehlerwert bei einer Schrägstellung von etwa 2° bzw. 30 mm/m erreicht. Das heißt, eine Radienkorrektur der Walzen bei Schrägstellung ist nicht notwendig. Ein entlang der Walze geschichtetes Kontaktmodell genügt als Näherung zur Betrachtung von Gierbewegungen der Walzen gegeneinander.

2.3.3 Thermisches Modell

Im Zusammenhang mit der obigen Modellierung des viskoelastischen Rollkontakts ist die durch die Walkarbeit pro Zeit im Schichtelement bei Durchlaufen der Kontaktstelle als Wärme dissipierte Energie (innere Reibung) wesentlich. Am einfachen Werkstoffmodell erfolgt die Energiedissipation durch die Verformung der Dämpferelemente mit der Geschwindigkeit der inneren Koordinaten. Die dadurch bedingte Temperaturzunahme führt zur Ausdehnung der Schicht in radialer Richtung und/oder zur Änderung der Werkstoffparameter. Vereinfachend wird dabei die Wärmeabgabe über die Stirnflächen gegenüber der Wärmeabgabe an der Mantelfläche vernachlässigt. Das führt zum ebenen Problem in Abb. 2.8.

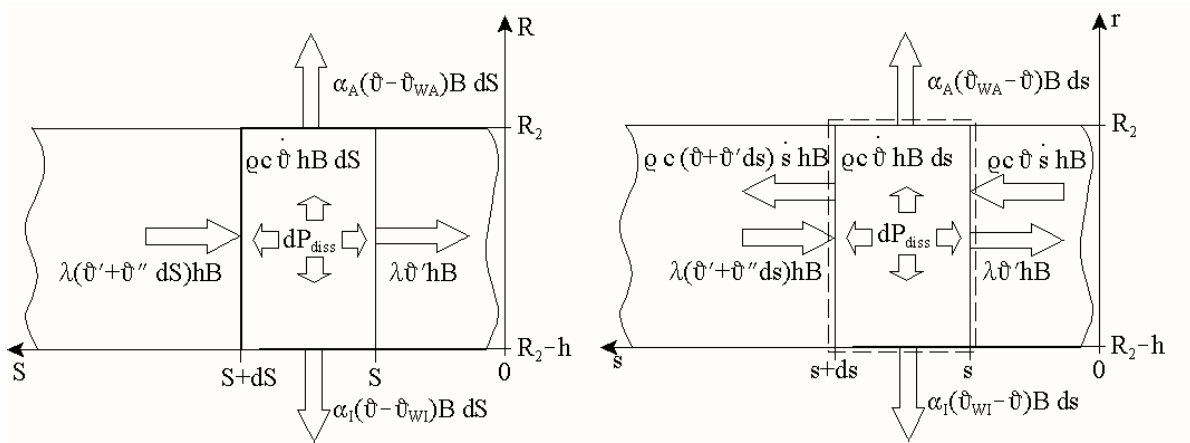


Abbildung 2.8: Wärmebilanz am umlaufenden Schichtelement (links) und am Kontaktelement (rechts)

Beschränkt man das thermodynamische Modell auf die Grundgleichung mit der inneren Energie, einer Wärmequelle (Dissipationsleistung), Wärmeübergang am Innenrand (Stahl-Luft) und am Außenrand (Polymer-Luft) und der Wärmeleitung im Belag in tangentialer Richtung, so folgt die Wärmebilanz für das umlaufende Schichtelement $dm = \rho h B dS$

$$\rho c \dot{\vartheta} = \frac{dP_{diss}}{h B dS} - \frac{\alpha_I}{h}(\vartheta - \vartheta_{WI}) - \frac{\alpha_A}{h}(\vartheta - \vartheta_{WA}) + \lambda \vartheta'' \quad (2.38)$$

Am kontaktfesten Kontrollvolumen ist zusätzlich das Ein- und Auslaufen von Schichtelementen unterschiedlicher Temperatur in den Kontakt zu berücksichtigen:

$$\rho c \dot{\vartheta} = \frac{dP_{diss}}{h B ds} - \frac{\alpha_I}{h}(\vartheta - \vartheta_{WI}) - \frac{\alpha_A}{h}(\vartheta - \vartheta_{WA}) + \lambda \vartheta'' - \rho c \vartheta' \dot{s} \quad (2.39)$$

Zur Vereinfachung werden folgende Annahmen getroffen :

- Im Kontaktdurchgang wird ausschließlich Energie dissipiert und als Wärme in die Schicht abgegeben. Es finden keine Ausgleichsprozesse statt.
- Im unbelasteten Umlauf wird ausschließlich Wärme an die Umgebung abgegeben.
- Die Temperatur des Schichtelements ist eine in radialer Richtung gemittelte Temperatur.
- Die Wärmeabgabe an die Umgebung ist eine Mittelung aller Wärmeabgabeprozesse (Wärmestrahlung, Konvektion usw.) am Innenrand der Schicht und am Außenrand der Schicht.

Das bedeutet, dass ein Schichtelement periodisch mit der Umlaufdauer an der Wärmequelle *Kontaktstelle* vorbei bewegt wird, Wärme aufnimmt und diese ganz oder teilweise im folgenden Umlauf an die Umgebung abgibt. Aufgrund der geringen Temperaturschwingungsgeschwindigkeit genügt die Entwicklung des Modells in der langsamen Zeitskala der Umlaufdauer. Für den Kontaktdurchlauf gilt die Differenzialgleichung

$$\dot{\vartheta} = \frac{dP_{diss}}{\varrho h B ds} = \frac{\kappa_2 \tau_2}{\varrho h B} \dot{v}_2^2 \quad (2.40)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\vartheta(t) - \vartheta(t_0) = \frac{1}{\varrho h B} \int_{t_0}^t \dot{q}_{diss} d\bar{t} \quad (2.41)$$

folgt ein Temperatursprung an der Kontaktstelle zwischen Einlauf- und Auslaufseite

$$\vartheta_A(t) - \vartheta_E(t_0) = \frac{1}{\varrho h B} \int_{t_E}^{t_A} \dot{q}_{diss} d\bar{t} \quad (2.42)$$

durch die im Kontaktdurchlauf dissipierte Energie. Für den freien Umlauf gilt die Differenzialgleichung

$$\dot{\vartheta} = -\frac{K_I}{\varrho h B}(\vartheta - \vartheta_{WI}) - \frac{K_A}{\varrho h B}(\vartheta - \vartheta_{WA}) \quad (2.43)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\vartheta(t) - \frac{K_I \vartheta_I + K_A \vartheta_{WA}}{K_I + K_A} = \left(\vartheta(t - t_0) - \frac{K_I \vartheta_{WI} + K_A \vartheta_{WA}}{K_I + K_A} \right) \exp \left(-\frac{K_I + K_A}{\varrho h B} (t - t_0) \right) \quad (2.44)$$

folgt daraus für einen Umlauf

$$\vartheta_E(t) - \vartheta_0 = [\vartheta_A(t - T_2) - \vartheta_0] \exp(-\delta_\vartheta T_2) \quad (2.45)$$

mit den zusammengefassten Größen

$$\begin{aligned} \delta_\vartheta &= \frac{K_I + K_A}{\varrho h B}, \\ T_2 &= \frac{2\pi}{\Omega_2}, \\ \vartheta_0 &= \frac{K_I \vartheta_{WI} + K_A \vartheta_{WA}}{K_I + K_A} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Damit ist eine Näherungslösung für das thermodynamische Problem gefunden, die einen Temperatursprung infolge Energiedissipation bei Kontaktdurchlauf und die langsame Verringerung der Temperatur im freien Umlauf durch Wärmeabgabeprozesse erfasst. Aus Versuchen bestimmt bzw. abgeschätzt werden müssen die Konstanten K_I, K_A bzw. δ_ϑ zur Beschreibung der Wärmeabgabe.

2.3.4 Zeitskalenmodell

Mit der Methode der Zeitskalen wird eine effektive Beschreibung gleichzeitig ablaufender aber unterschiedlich schneller Prozesse in einem System möglich. Die Grundidee ist dabei, jeden dieser Vorgänge in seiner (natürlichen) Zeitskala zu beschreiben. Angewandt auf das Problem des Rollkontakts heißt das, der schnelle Vorgang *Kontaktdurchlauf* wird in der schnellen Zeit θ_1 betrachtet, der langsame Vorgang *Umlauf* in der langsamen Zeit θ_2 . Die reale Zeit wird dabei nicht in eine Reihe von Zeitskalen entwickelt, sondern lediglich auf den verschiedenen Skalen gemessen, siehe [Kah95] und [Ben99]. Beim Kontakt rotierender Körper ist der Zusammenhang zwischen den beiden Zeitskalen und der realen Zeit t gegeben mit den Zeitkonstanten der halben Kontaktdauer T_K und der halben Umlaufdauer T_U :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{t}{T_K} \\ \theta_2 &= \frac{t}{T_U} = \varepsilon \frac{t}{T_K}\end{aligned}\tag{2.47}$$

mit

$$\begin{aligned}T_K &= \frac{a_K}{\Omega_2 R_2} \\ T_U &= \frac{\pi}{\Omega_2}\end{aligned}\tag{2.48}$$

und

$$\varepsilon = \frac{T_K}{T_U} = \frac{a_K}{\pi R_2}\tag{2.49}$$

Die zeitliche Änderung einer Größe bezüglich der beiden Zeitskalen wird damit geschrieben

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{1}{T_K} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{d}{dt} &= \frac{1}{T_K} ((\cdot)_{,1} + \varepsilon (\cdot)_{,2}) + O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{2.50}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{T_K^2} ((\cdot)_{,11} + 2\varepsilon (\cdot)_{,12}) + O(\varepsilon^2)\tag{2.51}$$

Dabei werden die Zeitskalen als voneinander unabhängig betrachtet. Eine zeitabhängige Größe wird damit bezüglich der Zeitskalen und des kleinen Parameters ε entwickelt:

$$f(t) = f_1(T_K, \theta_1, \theta_2, \varepsilon) + \varepsilon f_2(T_K, \theta_1, \theta_2, \varepsilon)\tag{2.52}$$

Lösung der lokalen Kontaktgleichung

Die inneren Kontaktgleichungen (2.33) können mit dem Zeitskalenmodell entwickelt werden:

$$\frac{\tau_k}{T_K} (v_{k1,1} + \varepsilon v_{k2,1} + \varepsilon v_{k1,2}) + v_{k1} + \varepsilon v_{k2} = v_{11} + \varepsilon v_{12}\tag{2.53}$$

Daraus folgt als neue dimensionslose charakteristische Größe das Verhältnis von Relaxationszeit zu Kontaktzeit τ_k/T_K . Für diese Größe können drei grundsätzliche Fälle unterschieden werden:

1. $\tau_k \ll T_K : \tau_k/T_K \approx \varepsilon :$

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : v_{k1} &= v_{11} \\ \varepsilon^1 : v_{k2} &= v_{12} - \frac{\tau_k}{\varepsilon T_K} v_{k1,1}\end{aligned}$$

Die innere Variable folgt im Kontaktdurchlauf exakt der äußeren ungestörten Verschiebung, die Feder wird nicht verformt. Damit können die Dämpfer derjenigen Elemente des Materialmodells mit kleinen Relaxationszeiten gegenüber der Kontaktdauer zu einem *Ersatzdämpfer* zusammengefasst werden.

2. $\tau_k \approx T_K : \tau_k/T_K \approx 1:$

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : \frac{\tau_k}{T_K} v_{k1,1} + v_{k1} &= v_{11} \\ \varepsilon^1 : \frac{\tau_k}{T_K} v_{k2,1} + v_{k2} &= v_{12} - \frac{\tau_k}{T_K} v_{k1,2}\end{aligned}$$

Die innere Variable wird durch die äußere Verschiebung und durch die Kontaktdauer gleichermaßen bestimmt.

3. $\tau_k \gg T_K : T_K/\tau_k \approx \varepsilon$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^0 : v_{k1,1} &= 0 \\ \varepsilon^1 : v_{k2,1} &= \frac{T_K}{\varepsilon\tau_k} v_{11} - v_{k1,2} - \frac{T_K}{\varepsilon\tau_k} v_{k1}\end{aligned}$$

Die innere Variable wird im Kontaktdurchlauf nicht verändert, der Dämpfer wird nicht verformt. Damit können die Steifigkeiten aller Elemente des Materialmodells mit großen Relaxationszeiten gegenüber der Kontaktdauer zu einer statischen *Ersatzfeder* zusammengefasst werden.

Als Ergebnis dieser Betrachtung steht festzuhalten, dass ein dreiparametriges Werkstoffmodell durchaus geeignet ist, das Verhalten des Belages beim Überrollen abzubilden. Die Gültigkeit des Modells beschränkt sich jedoch auf den Betriebsdrehzahlbereich, für den die Parameter ermittelt wurden.

Kapitel 3

Experimentelle Untersuchungen

3.1 Entwurf des Versuchsstands

Im Rahmen des Forschungsthemas wurde ein Versuchsstand entworfen und gebaut, mit dessen Hilfe die theoretischen Untersuchungen durch Experimente unterstützt bzw. abgesichert werden. Basierend auf eigenen Voruntersuchungen, Literaturlauswertungen und den Erfahrungen der Teilnehmer am *Arbeitskreis gekoppelte Rotoren* wurden Forderungen formuliert, die eine umfassende messtechnische Erfassung des Systemverhaltens erlauben und wenige unbekannte Parameter im Hinblick auf Modellbildung und Simulationsrechnung zeigen.

1. Die Rotoren sind Walzen, keine Scheiben oder Räder. Bei einem angestrebten Umfang von etwa 1 m unter Berücksichtigung der Möglichkeiten im Versuchsfeld wurde ein Schlankheitsgrad der Walze bei Anlagenbreite $B = 600$ mm und Durchmesser $D = 300$ mm festgelegt.
2. Die Walzen sind starre Körper. Eine signifikante Verformung der Walzen ist nicht festzustellen. Die Walzenrundkörper sind Stahlrohre mit einer Wanddicke von 20 mm mit Endscheiben einer Dicke 30 mm. Zur Aufnahme der Walzen im Gestell sind Wellenzapfen mit einer Länge 300 mm und einem Durchmesser 70 mm an den Endscheiben angebracht.
3. Die Steifigkeiten der Walzenlager sollen genau definierbar und deutlich kleiner als die Steifigkeiten der vorgesehenen Wälzlager und der Walzenkörper sein. Ausgeführt wurden die Walzenlager als (Biege-) Federrahmen, deren Steifigkeit in Kontaktichtung und in Längsrichtung über die Parameter freie Länge und Querschnittsabmessungen festgelegt werden. Um die Unsicherheit durch Fügestellen zu

vermeiden, wurden die Rahmen aus jeweils einer Platte gefertigt und anschließend wärmebehandelt.

4. Der Kontakt der Walzen erfolgt über eine *weiche* Schicht. Verschleiß und Lärm beim Rollen werden so vermindert, und die Eigenfrequenzen der starren Walzen sind deutlich kleiner als die der elastischen Schwingungsformen. Starrkörpereigenfrequenzen und elastische Eigenfrequenzen werden entkoppelt.
5. Gestellschwingungen und Starrkörperschwingungen der Walzen sind durch die massive Ausführung des Gestells hinreichend entkoppelt. Bei Seitenwänden aus 50 mm Stahlblechen erfolgt diese Entkopplung für Walzenschwingungen in Kontakttrichtung und Umfangsrichtung recht gut, jedoch nur eingeschränkt in Querrichtung. Da die Querrichtung jedoch nicht mit untersucht wird, genügt die festgestellte Entkopplung.
6. Die Aufbringung der Vorlast erfolgt durch Verschieben der oberen Walze im Gestell mittels Stellschrauben und anschließendes Feststellen des Federrahmens am Gestell. Die Last kann durch Messung des Abstands der Walzenkörper oder durch Messung der Verformung der Federrahmen und Umrechnung in eine Kraft ermittelt werden. Diese Einstellung darf aus Gründen des Arbeitsschutzes nur per Hand an den nicht drehenden Walzen stattfinden.
7. Für jede Walze wird ein eigener Motor auf einem separaten Gestell vorgesehen. Diese Anordnung ermöglicht Antriebs- und Bremsbetrieb beider Walzen. Mit einem Zahnriemen erfolgt die Kopplung von Motor und Walze.
8. Als weitere Elemente wurden Messbünde an den Rändern der Walzenkörper sowie T-Nuten in den Endscheiben zur Anordnung von Zusatzmassen vorgesehen.
9. Als Messtechnik verfügbar sind Beschleunigungsaufnehmer an den Lagerblöcken, Laser-Abstandssensoren an den dafür vorgesehenen Messbünden (geschliffene Oberfläche) sowie zur Abstandsmessung zwischen den Lagerblöcken. Weiter erfolgte eine Drehgeschwindigkeitsmessung an beiden Walzen mit Hilfe von inkrementellen Winkelmesssystemen und die Messung von Temperatur und Walzenkontur an der Walzenoberfläche 90° vor Eintritt in den Kontakt. Am Gestell wurden je nach Messaufgabe weiter Beschleunigungssensoren appliziert.

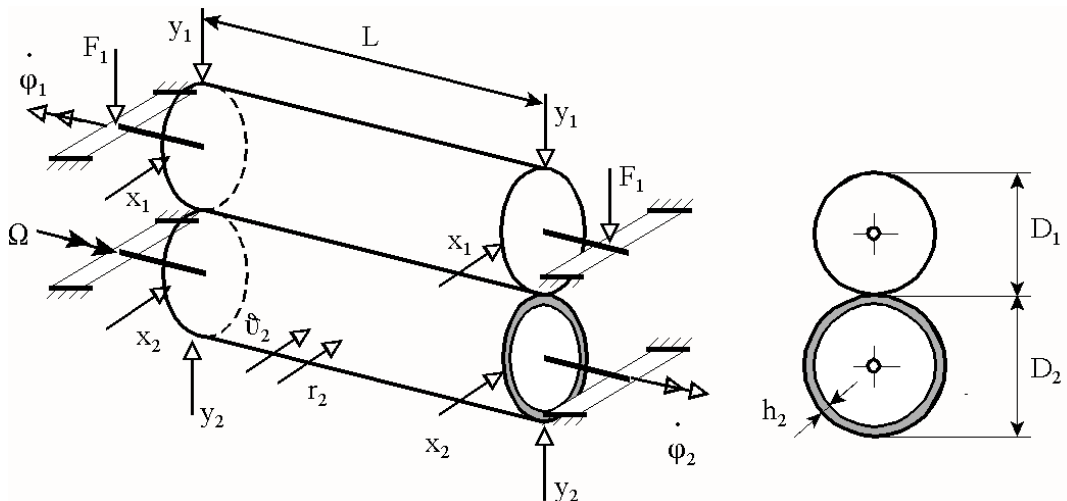


Abbildung 3.1: Schema des Versuchsstands im Versuchsfeld des Fraunhofer Instituts Werkzeugmaschinen und Umformtechnik in Chemnitz

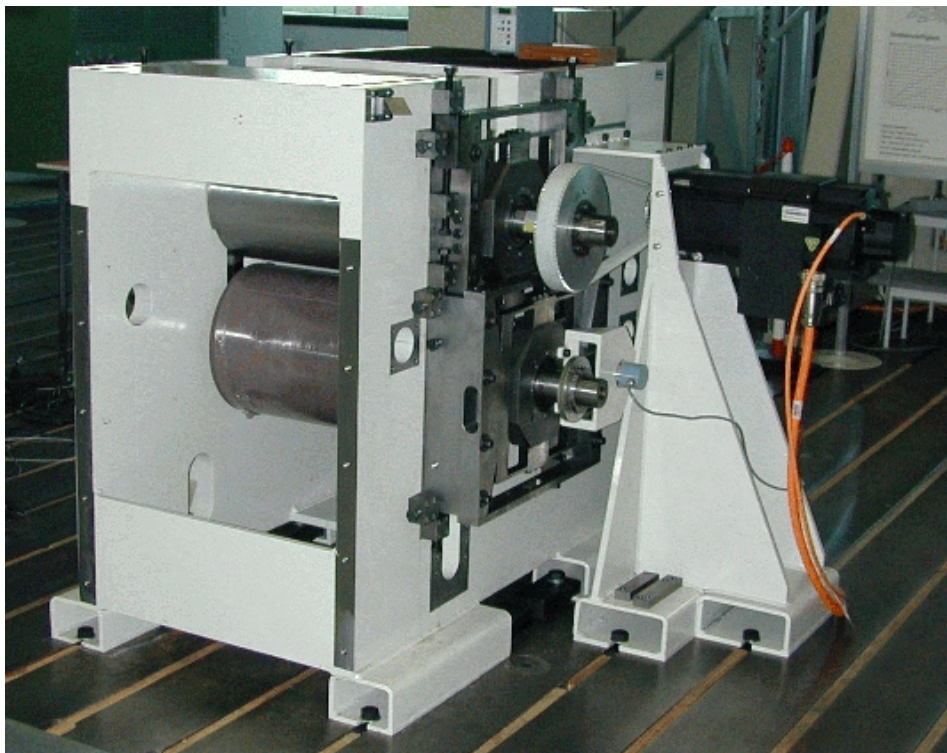


Abbildung 3.2: Versuchsstand im Versuchsfeld des Fraunhofer Instituts Werkzeugmaschinen und Umformtechnik in Chemnitz

3.2 Walzenparameter

Gemäß den im vorigen Abs. 2 zusammengefassten Bedingungen und Annahmen wurden zwei gleiche Walzengrundkörper angefertigt. Einer dieser Grundkörper wurde mit einer

Polymerschicht versehen. Beim Einbau der beiden Walzen zeigte sich an der Stahlwalze eine beträchtliche Unwucht, die auf eine schwankende Wanddicke des Stahlmantels zurückgeführt werden konnte. Diese wurde durch Zusatzmassen an den Stirnflächen ausgeglichen, so dass trotz der Beschichtung beide Walzen etwa die gleiche Masse aufwiesen. Die Schwerpunktlage und die Massenträgheitsmomente der beiden Walzen wurden aus dem CAD-Modell ermittelt und mit der gemessenen Masse abgeglichen.

Die geometrischen Abmessungen und die Trägheitsparameter der beiden Walzen sind in folgender Tabelle 3.1 zusammengestellt.

Parameter	Stahlwalze	beschichtete Walze
Durchmesser	300 mm	300 mm (Stahlkern)
Breite	600 mm	600 mm
Schichtdicke	-	20 mm
Stützweite der Lager	1200 mm	1100 mm
Masse	182,659 kg	185,535 kg
Schwerpunkt	-0,0018 m	+0,0018 m
Trägheitsmomente	1,968 kgm ²	2,122 kgm ²
	13,335 kgm ²	13,176 kgm ²

Tabelle 3.1: Parameter der elastisch gestützten starren Rotoren

3.3 Vorbereitende Messungen

3.3.1 Kennlinien der Lagerfedern

Es wurden zwei Sätze Federrahmen angefertigt. Die wesentlichen Abmessungen freie Länge der Federschenkel, Breite \times Höhe betragen:

- Paket 1: freie Länge 100 mm, Querschnitt 25×8 mm,
- Paket 2: freie Länge 100 mm, Querschnitt 25×10 mm.

Die Messung der Kraft-Verformungs-Kennlinien für die Federrahmen 1 und 2 zeigen den erwarteten linearen Zusammenhang zwischen Kraft und Deformation. Die daraus ermittelten Steifigkeiten bzw. Nachgiebigkeiten sind in Tabelle 3.2 angegeben.

Richtung	Rahmen 1 in kN/mm				Rahmen 2 in kN/mm			
	oben	oben	unten	unten	oben	oben	unten	unten
	vorn	hinten	vorn	hinten	vorn	hinten	vorn	hinten
y	11,6	11,0	12,7	11,1	18,1	18,0	18,0	18,0
x	105	105	111	128				
z		13,3		27,4				

Tabelle 3.2: Gemessene Steifigkeiten der Lagerfedern

3.3.2 Kennlinie der Kontaktfeder

Um prinzipielle Aussagen über das Kontaktverhalten zu finden, wurde die Stahlwalze langsam gegen die beschichtete Walze gepresst. Gemessen wurden die Lagerkraft und die Eindringtiefe der Stahlwalze in die Gummischicht. Ergebnis der Messung waren die unten angegebenen Kurven, die einerseits die progressive Kennlinie der Kontaktfeder und andererseits eine Differenz zwischen Be- und Entlastung zeigt. Da die sehr langsame Deformationsgeschwindigkeit nicht gemessen wurde, kann die Differenz nicht ausgewertet werden.

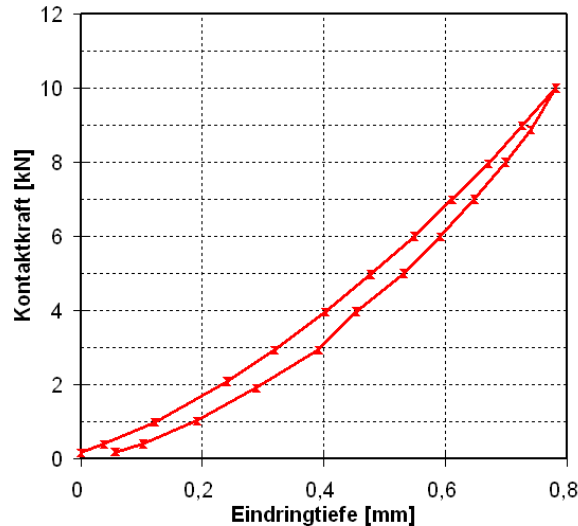


Abbildung 3.3: Statische Belastung des Walzenpaares - Kontakt-Kennlinie

Vergleicht man die gemessenen Werte mit den aus dem Kontakt-Modell nach Kapitel 2.3 berechneten Werten, so kann die berechnete Kurve an die gemessenen Kurven angepasst werden (Mittelwert). Für den Fall der nichtdrehenden Walzen lässt sich die statische Kontaktsteifigkeit recht gut aus diesen Versuchsergebnissen abschätzen.

Aussagen zum Verhalten im stationären Betrieb sind aus den Ergebnissen eines Hochlaufversuchs möglich. Dabei wird das gekoppelte (belastete) Walzenpaar aus dem Stillstand mit konstanter Drehbeschleunigung auf Betriebsdrehzahl beschleunigt und wieder abgebremst. Gemessen werden die Lagerkraft, die Eindringtiefe und die Drehzahl. Das folgende Ergebnis zeigt deutlich die Versteifung der Gummischicht bei schnellem Rollen, d.h. bei schneller Verformung im Kontaktdurchgang. Aus diesem Versuch können die von der Drehgeschwindigkeit abhängigen Parameter des Kontaktmodells bzw. des Werkstoffs recht gut ermittelt werden, wobei die Änderung der Drehzahl langsam erfolgen muss.

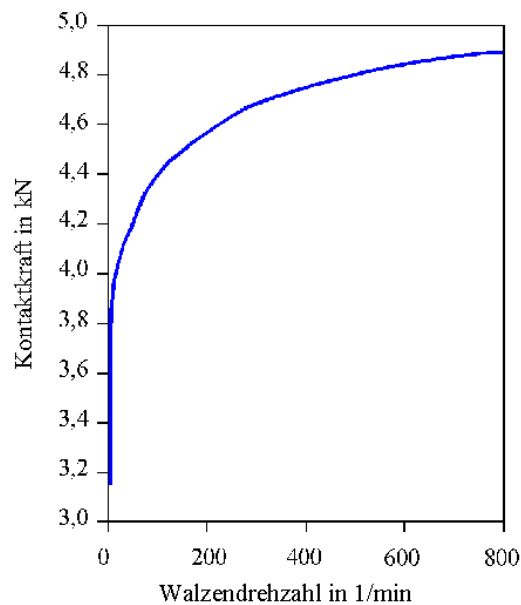


Abbildung 3.4: Kontaktkraft bei Drehzahlhochlauf mit verspannten Lagern

3.3.3 Messungen beim stationären Rollen

Die Untersuchungen im stationären Betrieb des Versuchsstands zeigen die Effekte

- Erwärmung der Gummischicht
- Anwachsen des Durchmessers der Walzen

Die gemeinsame Ursache dieser Effekte ist die Verformung der Gummischicht beim Durchlaufen der Kontaktzone. Dabei wird in der Gummischicht Wärme dissipiert, die Schicht wird wärmer und dehnt sich in radialer Richtung aus.

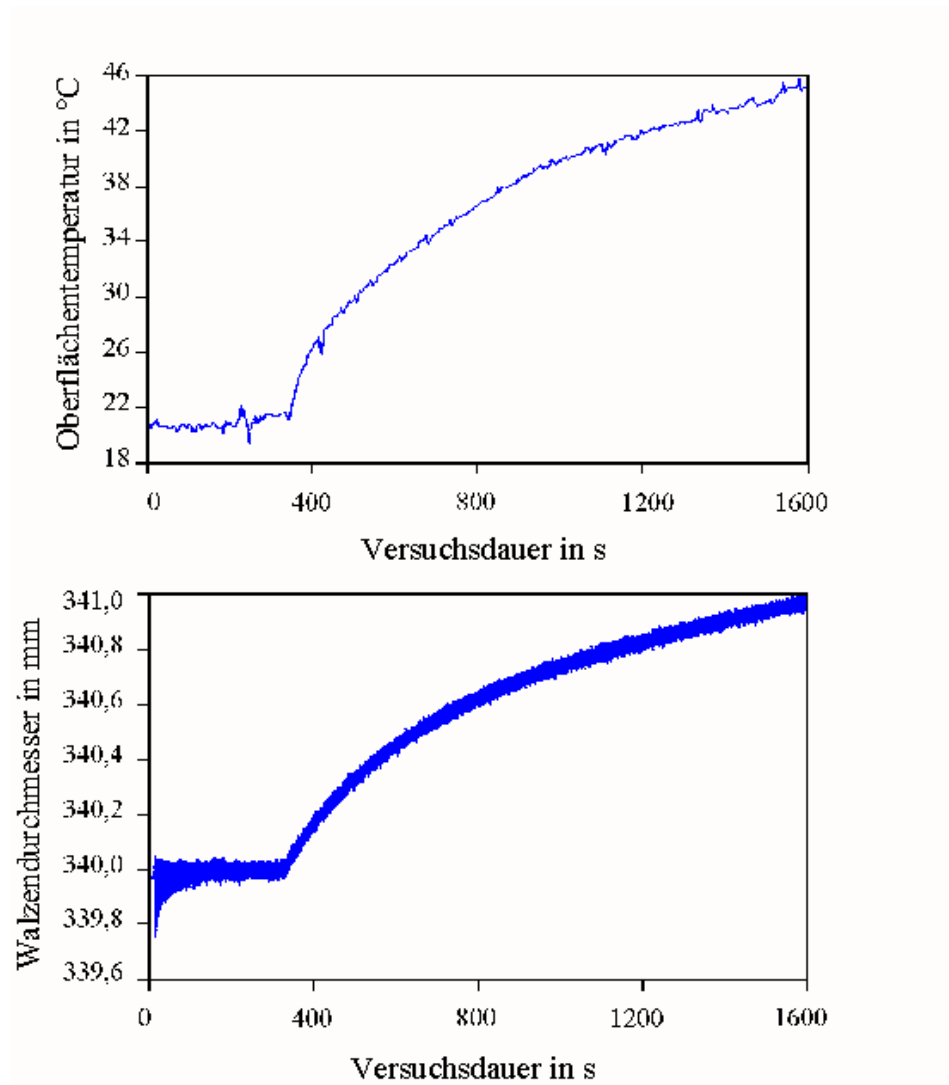


Abbildung 3.5: Ergebnisse von Temperatur- und Durchmesser messung beim stationären Rollen

Unter der Voraussetzung einer etwa konstanten Energiedissipation im Schichtelement bei jedem Kontaktdurchlauf werden für das thermische Modell die Parameter in einer Vergleichsrechnung zum Modell ermittelt. Damit sind die für die Analyse des Systemverhaltens des Versuchsstands erforderlichen Parameter aus statischen bzw. stationären Versuchsergebnissen ermittelt bzw. abgeschätzt.

3.4 Experimentelle Modalanalysen

Modalanalyse des Gestells bei nicht gekoppelten und nicht rotierenden Walzen

Ziel der Untersuchung zum modalen Verhalten des Gestells ist es, die als Annahmen bzw. Forderung formulierte Entkopplung der Gestellschwingungen von den Walzenschwingungen für den Versuchsstand zu prüfen. Dazu wurde der Versuchsstand mit Beschleunigungsaufnehmern an den Walzen und am Gestell versehen. Damit sollte eine Aussage zu den Eigenfrequenzen und Eigenformen möglich sein. Angeregt wurde am Achsstumpf der oberen Walze in z -Richtung durch einen Hammerschlag, siehe Markierungen in Abb. 3.6.

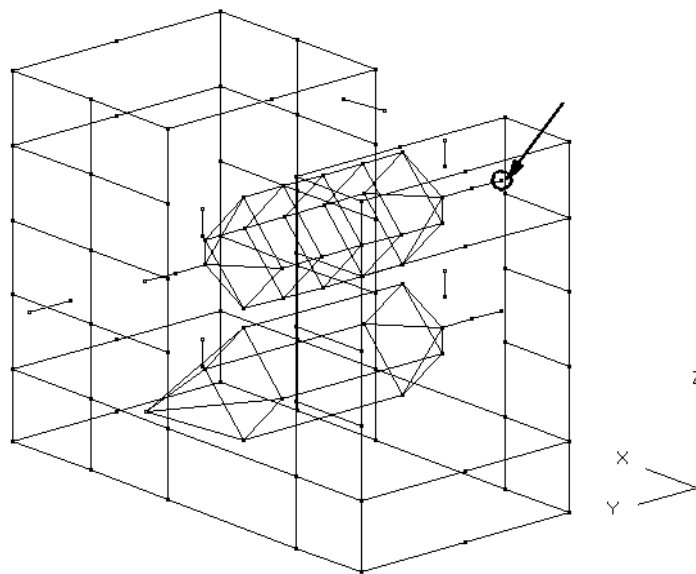


Abbildung 3.6: Messstellen für die Modalanalyse an Gestell und Walzen sowie Anregungspunkt (Hammerschlag)

Es wurden im Bereich bis 140 kHz insgesamt 16 Eigenfrequenzen ermittelt. Diese beinhalten sowohl Gestellschwingungen als auch die für die folgenden Untersuchungen wichtigen Starrkörperschwingungen. In der folgenden Tabelle 3.3 sind diese ermittelten Eigenfrequenzen und eine kurze Charakterisierung der Schwingform angegeben.

Mode	Frequenz [Hz]	Beschreibung der Schwingform
1	12.22	Drehschwingung der oberen Walze
2	12.90	nicht identifiziert
3	25.07	Starrkörperschwingung der oberen Walze in axialer Richtung
4	29.99	Gestellbiegeschwingung in Quer-Richtung
5	33.70	nicht identifiziert
6	53.54	Starrkörperschwingung der unteren Walze in Nip-Richtung
7	55.90	Starrkörperschwingung der oberen Walze in Nip-Richtung
8	60.46	Starrkörperschwingung der unteren Walze in axialer Richtung
9	68.78	Nick-Schwingung der oberen Walze
10	79.86	Nick-Schwingung der unteren Walze
11	108.98	Gier-Schwingung der oberen Walze
12	111.62	Starrkörperschwingung der oberen Walze in Längsrichtung
13	121.03	Schwingung Antriebsrad oben
14	124.82	Schwingung quer oben / Antriebsrad oben
15	137.47	Starrkörperschwingung der unteren Walze in Längsrichtung
16	138.08	Schwingung Lager oben längs

Tabelle 3.3: Ergebnis der experimentellen Modalanalyse am Versuchsstand bei nichtdrehenden und nicht gekoppelten Walzen.

Es wird eine recht gute Charakterisierung der Schwingformen hinsichtlich Gestellschwingungen und Walzenschwingung erzielt. Die gewünschte Trennung der Frequenzbereiche dieser Schwingformen wurde nicht erzielt. Dabei zeigt sich vor allem die geringe Steifigkeit des Gestells in Querrichtung der Walzen als störend. Eine Anregung von Walzen und Gestell in dieser Richtung ist nicht vorgesehen, so dass eine Überarbeitung als nicht notwendig angesehen wurde. Einen weiteren störenden Beitrag liefern die massiven Lager und Antriebsräder auf den Walzenzapfen. Deren Schwingungen gegen die Walzen, verbunden mit Zapfenbiegungen schließen unmittelbar an die Walzenschwingungen um die 100 Hz an.

Modalanalyse der elastisch gestützten Walze

Mit Hilfe der Modalanalyse der nicht gekoppelten und nicht rotierenden oberen Walze wird die Entkopplung von Starrkörperschwingformen und der elastischen Schwingformen der Walzen nachgewiesen. Diese Untersuchung wurde nur an der oberen (Stahl-) Walze durchgeführt, da ein sicheres Anbringen von Beschleunigungsaufnehmern am Polymerbelag der unteren Walze nicht möglich war. Es wurden im Bereich bis oberhalb

1000 Hz die folgenden 16 Eigenfrequenzen ermittelt.

Mode	Frequenz [Hz]	Beschreibung der Schwingform
1	52.88	Schwingung in axialer Richtung
2	56.02	Schwingung in Kontakttrichtung
3	68.92	Nickschwingung, Antriebsrad und Walzenkörper gleichphasig
4	81.26	(Schwingung der unteren Walze, s. Tabelle 3.3)
5	100.33	Nickschwingung, Antriebsrad und Walzenkörper gegenphasig mit Zapfenbiegung
6	121.78	Nickschwingung, Antriebsrad Walzenkörper gegenphasig mit Zapfenbiegung
7	131.93	höhere Schwingform, vor allem Zapfenbiegung
8	137.21	höhere Schwingform, vor allem Zapfenbiegung
9	185.27	Gierschwingung
10	401.01	höhere Schwingform, vor allem Zapfenbiegung gleichphasig
11	413.94	höhere Schwingform, vor allem Zapfenbiegung gleichphasig
12	490.80	höhere Schwingform, vor allem Zapfenbiegung gegenphasig
13	608.69	höhere Schwingform, vor allem Zapfenbiegung gegenphasig
14	665.82	höhere Schwingform, vor allem Zapfenbiegung, Antriebsrad in Längsrichtung
15	1.02e+3	Schalenschwingung
16	1.37e+3	Biegeschwingung

Tabelle 3.4: Ergebnis der Modalanalyse der unbeschichteten Walze

Es bestätigt sich das erwartete Verhalten der Walze. Die tiefen Eigenfrequenzen bis etwa 100 Hz sind von den Starrkörperbewegungen der Walze dominiert. Oberhalb 100 Hz bis etwa 200 Hz finden sich weitere Starrköperschwingungen von Walzenkörper und Antriebsrad, jedoch bereits mit einer Verformung des Zapfens zwischen Walze und Antriebsrad verbunden. Die Querbewegung mit etwa 130 Hz und die Gierbewegung (Kippen in Querrichtung) mit 185 Hz sind durch die große Steifigkeit der Federrahmen in x -Richtung deutlich nach oben verschoben. Als etwas störend zeigt sich der Einfluss des einseitig angebrachten Antriebsrades, dessen Schwingungen ab 100 Hz gegenüber dem Walzengrundkörper mit einer Biegung des Wellenzapfens verbunden sind.

Die eigentlichen Biegeschwingungen der beiden Zapfen ab 400 Hz und Deformationen des Walzengrundkörpers bei 1000 Hz (Schalenschwingung) und 1370 Hz (Biegeschwingung) spielen in den folgenden Betrachtungen keine Rolle.

Modalanalyse des Gestells

Die in der ersten Versuchsreihe ermittelten Walzenschwingungen zeigen eine Vermischung von Walzenschwingungen im Gestell und Walzenschwingungen mit dem Gestell. Die Anordnung der Beschleunigungsaufnehmer lässt diese Unterscheidung nicht zu. Eine weitere Untersuchung erfasst gezielt die Schwingungen des Gestells.

Mode	Frequenz [Hz]	Beschreibung der Schwingform
1	30.12	Kippen
2	61.11	Kippen
3	67.62	Kippen
4	79.79	Kippen+Verwinden
5	88.73	Kippen + Verwinden
6	101.01	auf-ab + Kippen + Kippen
7	108.10	auf-ab
8	116.26	auf- ab + Kippen
9	127.17	Kippen+Verwinden
10	131.11	Starrkörper
11	194.27	Biegung Seitenwände
12	211.87	Biegung Seitenwände
13	359.53	Biegung Seitenwände + Verwindung
14	373.56	Biegung Seitenwände
15	384.96	Biegung Seitenwände + Verwindung

Tabelle 3.5: Ergebnis der Modalanalyse des Gestells

Modalanalyse bei gekoppelten Walzen

Mit den vorherigen Analysen liegen Erkenntnisse über Eigenfrequenzen des Gestells und der beiden elastisch im Gestell gestützten Walzen vor. Das eigentliche Ziel der Untersuchungen ist die Analyse der Schwingungen der radial gekoppelten Rotoren. Es wird bei nicht drehenden Walzen eine Vorspannkraft eingestellt und die gekoppelten Walzen werden wie in den bisherigen Analysen durch Hammerschlag auf den Wellenstumpf der oberen Walzen angeregt.

Es konnte zunächst nicht die interessierende Schwingform der Walzen im Kontakt gegeneinander ermittelt werden. Erst bei drehenden Walzen war der Nachweis dieser Kontaktschwingung möglich. Es wurde auch eine Abhängigkeit der Kontakteigenfrequenzen von der Drehgeschwindigkeit und der Vorspannkraft vermutet. Dazu wurden die in der

Tabelle 3.6 angegebenen Schwingformen ermittelt.

Eine Abschätzung der Frequenz mit den zuvor ermittelten Steifigkeiten für Kontakt und Lager liefert einen Wert um 90 Hz. Jedoch scheinen Kontaktschwingungen durch den Polymerbelag der unteren Walze bei niedrigen Drehzahlen so stark gedämpft zu sein, dass ein Nachweis bei Anregung durch den Hammerschlag kaum möglich ist. Das zeigt sich auch in den *neben* den interessierenden Eigenschwingformen ermittelten Eigenfrequenzen. Diese treten bei hohen Drehzahlen nicht mehr so auffällig in Erscheinung.

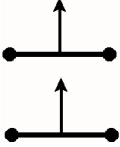
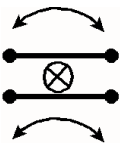
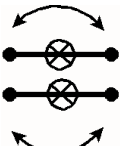
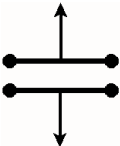
Schwing- form	Drehzahl [U/min]									
	Ruhe	20	100	300	525	630	667	704	750	788
	54,14	54,17	54,15	54,17	54,18	54,17	54,17	54,11	54,15	53,65
	61,70									
	68,61	68,88	68,66	70,21	71,48	71,58	71,53	71,70	71,74	71,83
		73,73	76,82	72,99						
	77,86	83,10	84,01	83,94	84,08	83,99	84,06	83,96	83,92	83,95
	87,64	93,20		100,51	101,92	101,97	101,90	101,73	101,68	101,83
			106,25		105,1	111,17	117,33			

Tabelle 3.6: Ergebnis der Modalanalyse der gekoppelten und rotierenden Walzen

Als Ergebnis der Modalanalysen ist festzuhalten, dass die angestrebte Entkopplung von Gestell und Walzenschwingungen in Kontakttrichtung gegeben ist, ebenso in Längsrichtung (Transportrichtung). Als empfindlich zeigte sich die Querrichtung, in der die Seitenwände mit den Walzen schwingen können. Eine Versteifung des Gestells in dieser

Richtung ist jedoch nicht notwendig, da eine Belastung der Walzen in Querrichtung (Achsrichtung) nicht vorgesehen ist.

Weiter zeigte sich die Anregung der Kontaktschwingung der Walzen gegeneinander auf Grund der Dämpfungseigenschaften des Walzenbelages als schwierig. Erst bei einer genügend hohen Drehzahl konnte diese Schwingform deutlich mit dem Hammerschlag angeregt werden.

3.5 Messungen zu aufklingenden Schwingungen

Der in Abs. 2.2.4 beschriebene Effekt aufklingender Schwingungen bei gleichzeitiger Ausbildung eines Profils auf der Oberfläche der beschichteten Walze konnte auch am Versuchsstand nachgewiesen werden. Die Modalanalyse bei rotierenden Walzen identifizierten die Brummerfrequenz als die Frequenz der Eigenschwingform der Walzen gegeneinander. Der Zusammenhang zwischen Antriebsfrequenz und Brummerfrequenz war durch die Welligkeitsordnung gegeben. Abbildung 3.7 zeigt die Messung der Oberflächenwelligkeit und der dazu phasengleichen Temperaturwelligkeit der Ordnung 9.

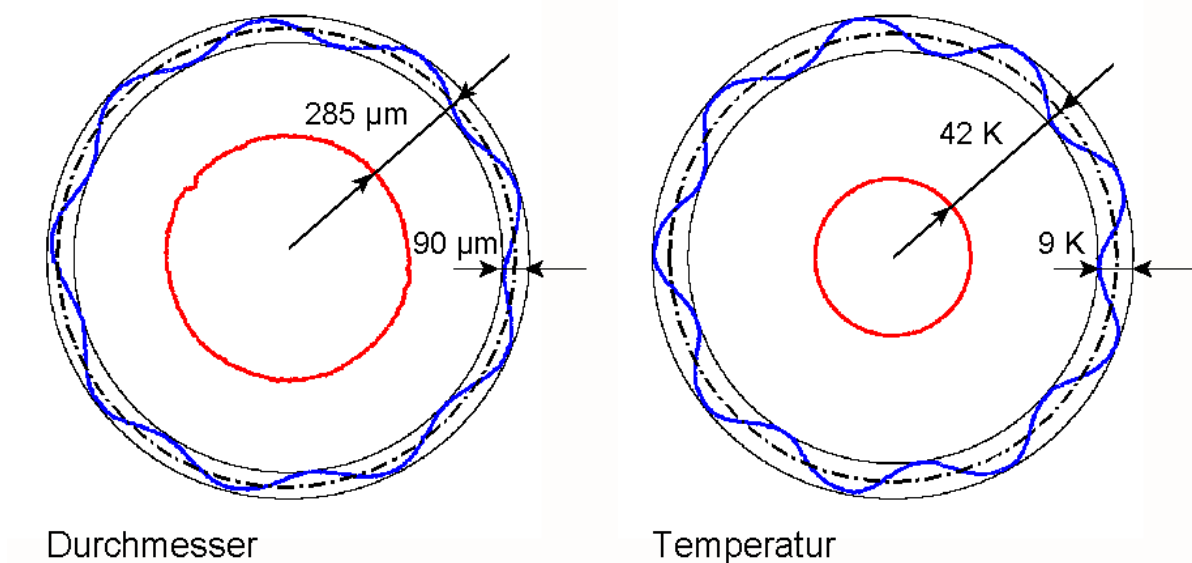


Abbildung 3.7: Durchmesser- und Temperaturzunahme mit Welligkeiten nach 20 min Versuchsdauer

Weitere Untersuchungen hatten die Ermittlung von Drehzahlbereichen aufklingender Schwingungen sowie die Betrachtung der Geschwindigkeit mit der die Amplitude anwächst zum Ziel. Diese Messungen wurden ausführlich am Versuchsstand mit dem Federrahmen 1 und Welligkeitsordnungen acht, neun und zehn durchgeführt.

Die Tabelle 3.7 zeigt die durchgeführten Versuche und die dabei gemessenen Brummfrequenzen und Welligkeitsordnungen.

Versuch	1	2	3
Welligkeit	8	9	9
Vorlast	2x3kN	2x3kN	2x2kN
Start-Temperatur	42,1 °C	42°C	42 °C
Dauer bis $>50 \mu\text{m}$	6,72 min	14 min	12 min
Amplitude			
End-Temperatur	47,6 °C	49,9 °C	45,4 °C
Drehzahl	788 1/min	705 1/min	685 1/min
Drehzahlbereich	780 - 820	680 - 740	670 - 710
Breite des Bereichs	(5,33 Hz)	(9 Hz)	(6 Hz)
Amplitude	52 μm	48 μm	46 μm

Tabelle 3.7: Experimentell bestätigte aufklingende Welligkeiten

Im der folgenden Abb. 3.8 ist die Entwicklung der Welligkeiten in den Drehzahlbereichen in der Tabelle 3.7 dargestellt. Es fällt dabei das schnelle Anwachsen der Achter-Welligkeit gegenüber den beiden Neuner-Welligkeiten auf. Die Aufklingdauern für die beiden Neuner-Welligkeiten sind etwa gleich groß. Der Drehzahlbereich, in dem das Aufklingen der Schwingungen beobachtet werden konnte, ist für die erste Neuner-Welligkeit mit 60 1/min am größten. Für die Achter-Welligkeit und die Neuner-Welligkeit mit verringerter Kontaktkraft wurde dieser Bereich mit etwa 40 1/min um ein Drittel kleiner ermittelt. Die folgende Abbildung 3.9 zeigt den typischen Zeitverlauf eines Versuchs mit aufklingender Welligkeit. Es sind deutlich die einzelnen Phasen des Versuchsablaufs zu erkennen:

1. Aufbringen der Vorspannkraft bei nichtdrehenden Walzen,
2. Einrollen der Walzen mit einer Drehzahl 2 1/min,
3. Einrollen der Walzen mit Betriebsdrehzahl,
4. zügiges Aufklingen der Schwingungen und der Profilwelligkeit auf dem Walzenbelag.

Aus der Auswertung des Mittelwerts der Schwingungen im Temperaturprofil und im Radienzuwachs folgt eine kontinuierliche Fortsetzung des Verlaufs. Ein schnelleres Anwachsen durch die Schwingungen findet nicht statt.

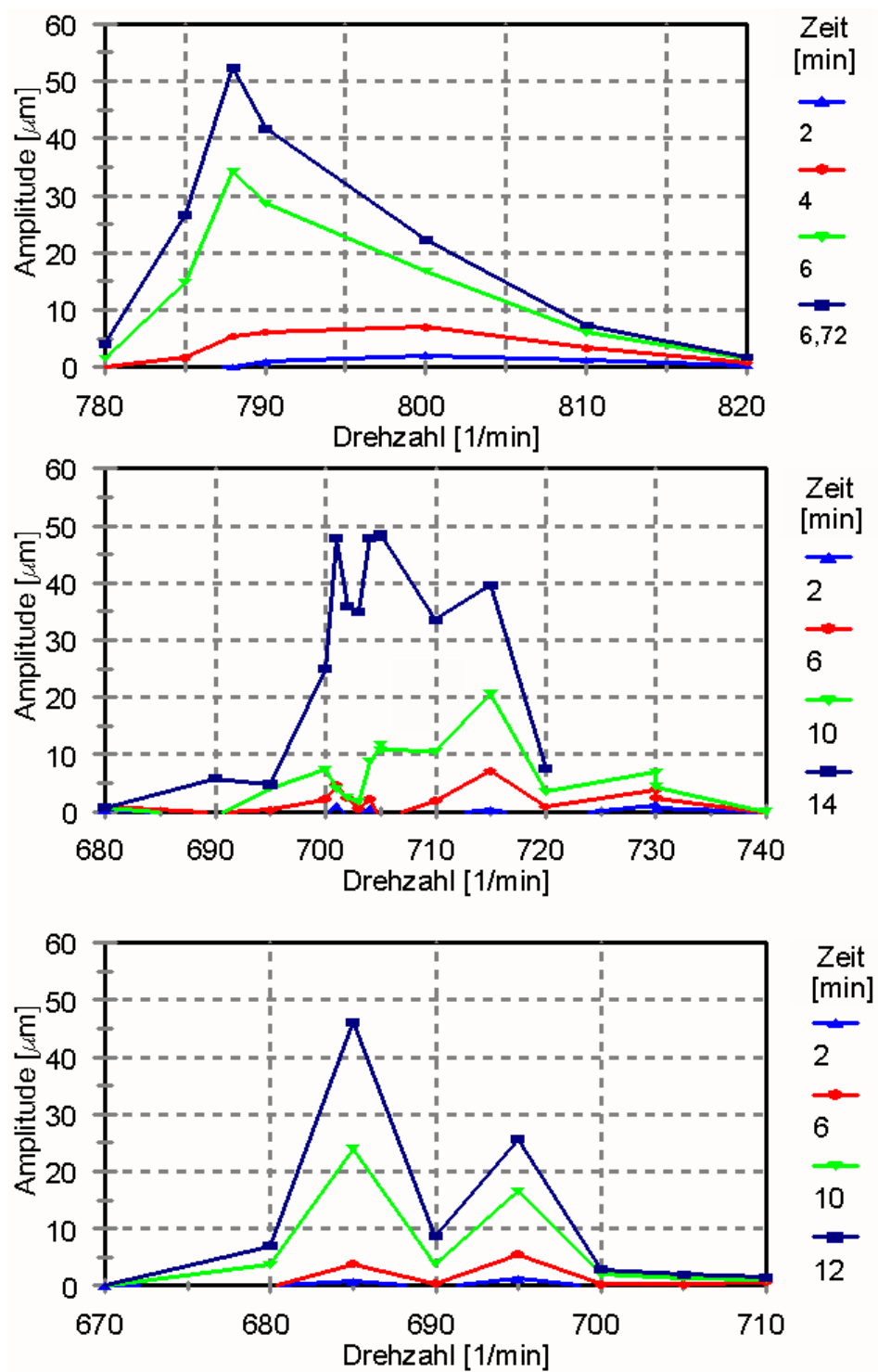


Abbildung 3.8: Entwicklung der Welligkeiten in den Versuchen gemäß Tabelle 3.7

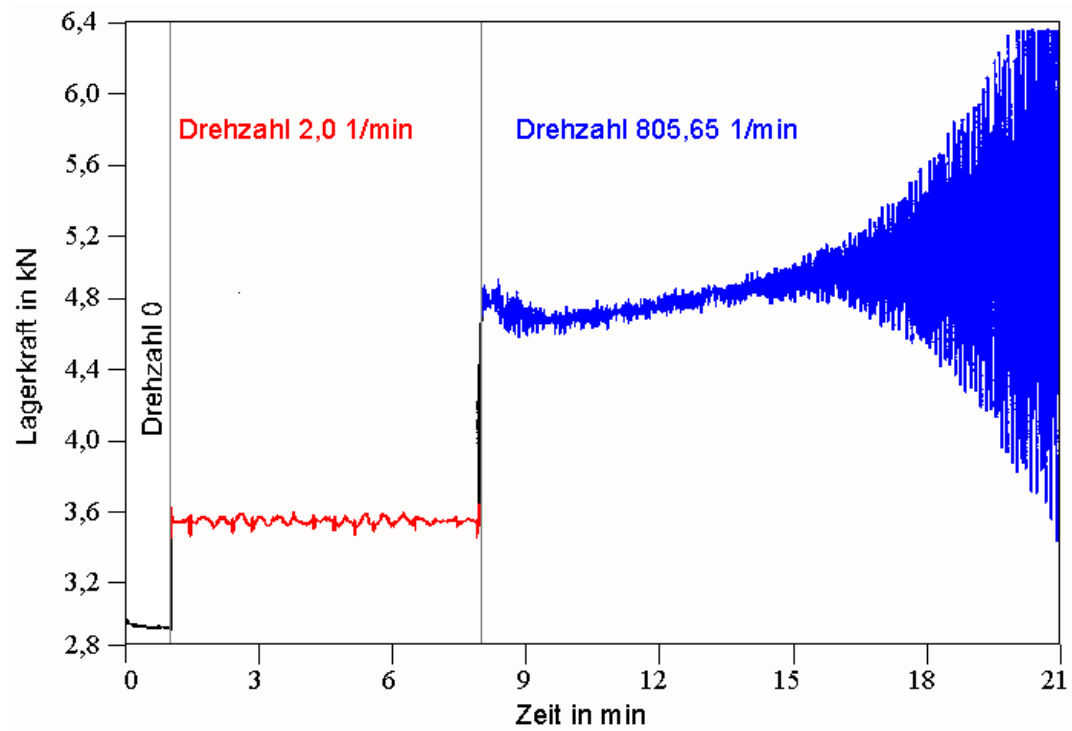


Abbildung 3.9: Entwicklung der Lagerkraft in einem Versuch mit aufklingender Welligkeit

Kapitel 4

Berechnungen

4.1 Ziel

Das erste Ziel der Berechnungen ist die Beschreibung des Systemverhaltens im stationären Betrieb. Für die gewählte Problemstellungen bedeutet das, die Ermittlung der Kontaktgrößen Kontaktkraft und Wärmeeintrag sowie die Entwicklung von Temperatur und Dicke des Walzenbelags und daraus resultierend die Walzenbewegung gegeneinander und das Abrollen der Walzen aufeinander. Die Systemparameter werden durch einen Vergleich der Berechnungsergebnisse mit den Messergebnissen im stationären Betrieb in Abs. 3 ermittelt.

Das zweite Ziel, die Betrachtung des Systemverhaltens des schwingungsfähigen Systems, erfordert die Einführung von Störungen des stationären Systemverhaltens. Dieses Modell erlaubt Untersuchungen der Stabilität des Systems gekoppelter Walzen. Der Vergleich von numerischen mit experimentellen Ergebnissen zur Entwicklung einer Welligkeit auf den Walzen liefert Erkenntnisse zum Entstehungsmechanismus dieser Profile. Abschließend soll der Einfluss von Parametern auf die Stabilität bzw. Welligkeitsentwicklung diskutiert und so eine Beurteilung realer Systeme unterstützt werden.

4.2 Methode der Zeitskalen - Zeitskalenmodell

Zur analytischen bzw. analytisch unterstützten numerischen Untersuchung des Systems *gekoppelte Rotoren* ist die Anwendung der Methode der Zeitskalen günstig. Die Betrachtung eines Schichtelements während eines vollständigen Umlaufs liefert eine weitere zulässige Vereinfachung der Kontaktbeschreibung. Während der gesamte Umlauf in der Zeit $2T_U = \frac{2\pi}{\Omega_2}$ erfolgt, wird die Schicht nur in einer kurzen Kontaktzeit $2T_K = \frac{2a_K}{\Omega_2 R_2}$ verformt. Bei einer Kontaktlänge von etwa einem Prozent des Walzenumfangs und ei-

ner Umlauffrequenz von etwa 10 Hz erfolgt die Verformung innerhalb der Zeit von $2T_K \approx 10^{-3}$ s. Die Verformung der Schicht erfolgt demzufolge nahezu impulsartig bei Durchlaufen der Kontaktlänge $2a_K$. Mit Hilfe der in Abs. 2 entwickelten Modelle, sowohl des Walzenpaares als auch der Kontaktschicht, lässt sich unter Ausnutzung dieser zeitlichen Entkopplung von Kontaktdurchlauf und Umlauf eines Schichtelements eine gute Näherung des Kontaktverhaltens konstruieren. Dabei wird ausgenutzt, dass der Durchlauf eines Schichtelements sehr schnell im Vergleich zum Umlauf des Schichtelements erfolgt und dazu wiederum die Temperatur des Schichtelements sehr langsam anwächst. Zur effektiven mathematischen Behandlung derartiger verschieden schneller Vorgänge innerhalb eines Systems hat sich die Methode der vielfachen Zeitskalen [Kah95], [Ben99] auch in Kombination mit Mittelungsmethoden herausgestellt.

Es wird jedem dieser Vorgänge eine Zeitkonstante zugeordnet. Anstelle der *realen Systemzeit* t wird die Folge der dimensionslosen Zeiten $\theta_1, \theta_2, \dots$ zur Beschreibung der jeweiligen Vorgänge genutzt. Für das Walzenpaar können mit den Zeitkonstanten der halben Kontaktdauer T_K und der halben Umlaufdauer T_U die folgenden dimensionslosen Zeitskalen angegeben werden, s. Gleichung (4.1):

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{t}{T_K} = \frac{R_2 \Omega_2}{a_K} t \\ \theta_2 &= \frac{t}{T_U} = \frac{\Omega_2}{\pi} t\end{aligned}\tag{4.1}$$

Damit gilt für die Ableitung folgende Vorschrift:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{R_2 \Omega_2}{a_K} \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \frac{\Omega_2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \theta_2} = \frac{R_2 \Omega_2}{a_K} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \left(\frac{R_2 \Omega_2}{a_K} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2}\end{aligned}\tag{4.2}$$

mit

$$\varepsilon = \frac{a_K}{\pi R_2}\tag{4.3}$$

Die Konstruktion einer Näherungslösung erfolgt in zwei Schritten:

1. Im ersten Schritt wird eine Lösung für den schnellen Vorgang Kontaktdurchlauf in der zugeordneten Zeitskala θ_1 entwickelt unter Berücksichtigung von in θ_2 veränderlichen Zustandsgrößen.
2. Im zweiten Schritt, der eigentlichen Lösung zur Problemstellung Systemverhalten und Stabilität in der Zeit θ_2 , sind die Zustandsgrößen in θ_2 abhängig von den (langsam) veränderlichen Systemparametern und einem Mittelwert der schnellen

Lösung in θ_1 . Die Temperatur ändert sich nur langsam, die Beschreibung des thermischen Problems erfolgt in der langsamen Zeit θ_2 .

4.3 Skalierung des Ortes - Modell für große und kleine Abschnitte des Walzenbelags

Analog der Skalierung der Zeit kann auch der Ort in Skalen betrachtet werden. Mit den in Abs. 2.3 hergeleiteten Beziehungen für kleine Ortsgrößen

$$\frac{h}{R} = \varepsilon_r \ll 1; \frac{a_K}{\pi R} = \varepsilon_s \ll 1 \quad (4.4)$$

kann die Betrachtung des Verschiebungsfeldes am Walzenbelag weiter vereinfacht werden. Neben der Entwicklung der Verschiebungen an der Oberfläche als Polynom niedrigen Grades, wird auch der Verlauf der Verschiebungen in radialer Richtung näherungsweise durch Polynome niedrigen Grades beschrieben, vgl. [Lab02].

Mit der Einführung von Belagkoordinaten (r, s) können diese ebenfalls in Skalen entwickelt werden. Die Kontaktstelle auf der Oberfläche wird mit der großen Skale (Index 2) bei

$$s_2 = 0; r_2 = R \quad (4.5)$$

beschrieben. Diese kann auf der kleinen Skale (Index 1) genauer aufgelöst werden:

$$-a_K \leq s_1 \leq a_K; R - h \leq r_1 \leq R \quad (4.6)$$

Vergleichbare Ansätze werden vor allem in der Strömungsmechanik zur Beschreibung von Grenzschichten (*Boundary Layer*) entwickelt. Diese lassen sich jedoch auch zur Konstruktion von Näherungslösungen bei Analyse von Effekten mit großen Gradienten in einer ϵ -Umgebung anwenden. Hier geschieht das für die Kontaktstelle als unmittelbare Umgebung des Kontaktpunkts.

4.4 Systemverhalten in der langsamen Zeit - Stationärer Zustand

Als stationärer Zustand des Walzenpaares im mechanischen Sinne sei im Weiteren das Rollen der Walzen unter Vorlast bei jeweils konstanter Drehzahl bezeichnet. Für die me-

chanische Bewegungsgleichung zur Berechnung des stationären Zustandes verschwinden die Ableitungen nach der kurzen Zeit θ_1 , die Zustandsgrößen sind nur noch von der langen Zeit θ_2 abhängig, ebenso die Systemparameter.

Es ist notwendig, diese Definition des stationären Zustands um die thermische Komponente zu ergänzen. Die beim Rollen dissipierte Energie führt zu einer Erwärmung der Schicht und damit auch zur Änderung der Schichtparameter. Also wird ein thermomechanisch stationärer Zustand dadurch gekennzeichnet, dass die Zustandsgrößen und Systemparameter in der langen Zeit unveränderlich sind. Dazu muss auch und vor allem die im Kontaktdurchlauf dissipierte Energie aus dem System im freien Umlauf wieder abgegeben werden. Die Messungen zeigen, dass ein exakter stationärer Zustand im thermomechanischen Sinne nicht die Voraussetzung zur Entstehung der Brummerschwingungen ist. Das heißt, es muss lediglich ein quasistationärer Zustand erreicht werden, in dem sich die Systemparameter mit der langen Zeit ändern. Ein thermomechanisch quasistationärer Zustand ist dann erreicht, wenn während einer Umdrehung der beschichteten Walze keine signifikanten Änderungen der Zustandsgrößen mehr festzustellen sind.

Kontaktberechnung - Leerlaufschlupf

Mit der Definition eines globalen Schlupfes mit den Umfangsgeschwindigkeiten der unverformten Walzen (2 treibend, 1 getrieben) lässt sich ein Leerlaufschlupf aus der Bedingung Haften im gesamten Kontaktbereich angeben. Dieser Leerlaufschlupf, der nur aus der Verschiebung im Kontaktgebiet resultiert, ist typisch für den Kontakt von Rollkörpern aus unterschiedlichem Material und wird in der Literatur als Formänderungsschlupf bezeichnet. Seine Größe ist abhängig von der Querdehnzahl des Belagwerkstoffes. Der Formänderungsschlupf entspricht dem Freiwert in Gl. (2.34) und wird abgeschätzt aus der Bedingung der Volumenkonstanz bei inkompressiblem Schichtwerkstoff:

$$\delta \approx \frac{v_0}{h} \quad (4.7)$$

Der Formänderungsschlupf führt zu einem Drehgeschwindigkeitsverhältnis im stationären Betrieb von

$$i_{12} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \left[1 + \frac{v_0}{h} \left(1 - \frac{h}{R_2} \right) \right] \quad (4.8)$$

welches zeigt, dass durch das Eindringen der Stahlwalze in den Belag der beschichteten Walze deren wirksamer Radius vergrößert wird.

4.5 Systemverhalten in der kurzen Zeit - Eigenfrequenzen und Schwingungsformen

Die Betrachtungen zum Kurzzeitverhalten beginnen mit der Angabe der Systemtemperatur und der Umgebungstemperatur. Damit sind die Systemparameter im untersuchten (kurzen) Zeitintervall konstant. Weiter ist es notwendig, den untersuchten Arbeitspunkt durch die Angabe der Drehzahl der angetriebenen Walze und der Eindringtiefe der Stahlwalze in den Belag bei gegebener Arbeits- und Umgebungstemperatur zu definieren. Untersucht werden nun kleine Bewegungen um diesen stationären Zustand. Das somit mögliche Minimalmodell hat den Freiheitsgrad vier:

- Verschiebungen y_1, y_2 der Walzendrehachsen in Kontakttrichtung und
- Drehungen φ_1, φ_2 der Walzen um ihre Längsachse, vgl. Abb. 4.1.

Die Vorspannung der Walzen erfolgt durch Verschieben des Lagers der oberen Walze um einen konstanten Weg s_0 . Der Antrieb erfolgt an der unteren Walze durch das Moment M_2 .

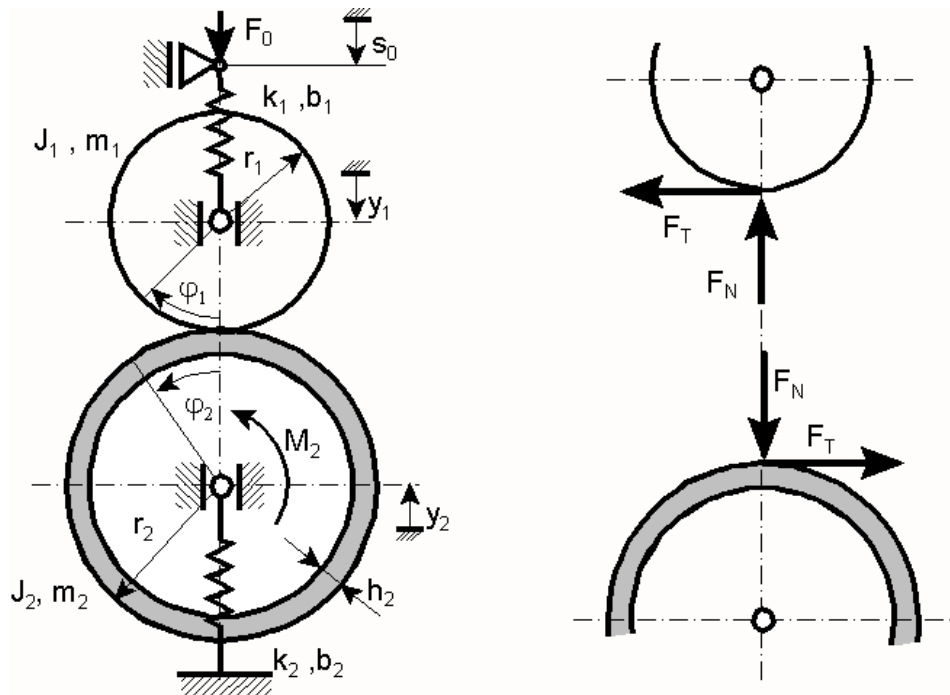


Abbildung 4.1: Minimalmodell des Walzenpaares

Die Bewegungsgleichungen für das Walzenpaar lassen sich damit angeben:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 + k_1 y_1 &= k_1 s_0 - F_N(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0) \\
 m_2 \ddot{y}_2 + b_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 &= -F_N(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0) \\
 J_1 \ddot{\varphi}_1 &= r_1 F_T(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0) \\
 J_2 \ddot{\varphi}_2 &= M_2 - r_2 F_T(u_0, v_0, \dot{u}_0, \dot{v}_0)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

mit den globalen Verformungen an der Kontaktstelle

$$\begin{aligned}
 v_0 &= y_1 + y_2 \\
 \dot{u}_0 &= r_2 \dot{\varphi}_2 (1 + v_0/h_2) - r_1 \dot{\varphi}_1
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Es wird weiter ein stationärer Betriebszustand betrachtet, der durch die Winkelgeschwindigkeit Ω_2 und die Eindringtiefe \bar{v}_0 definiert ist. Es stellt sich eine stationäre Lage des Systems, gekennzeichnet durch quergestrichene Variable, ein. Deren Zeitableitungen sind dabei identisch null. Mit der Einführung kleiner Störungen q_1, \dots, q_5 der stationären Lage des Systems gemäß

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \bar{y}_1 + q_1 & r_1 \varphi_1 &= r_1 \Omega_1 t + q_3 \\
 y_2 &= \bar{y}_2 + q_2 & r_2 \varphi_2 &= r_2 \Omega_2 t + q_4 \\
 v_0 &= \bar{v}_0 + q_1 + q_2 & u_0 &= q_5
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

können die Kontaktkraft-Verformungs-Beziehungen und die Abrollbedingung für kleine Auslenkungen aus der stationären Lage linearisiert werden. Zusätzlich wird die Längssteifigkeit k_R des Zahnriementriebs zwischen Antriebsmotor und angetriebener Walze berücksichtigt, vgl. [HD94]. Damit erhält man folgendes lineares Differenzialgleichungssystem zur Beschreibung des Systemverhaltens bei kleinen Auslenkungen aus der stationären Lage

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{q}_1 + [k_1 + k_N(\bar{v}_0, \Omega_2)] q_1 + k_N(\bar{v}_0, \Omega_2) q_2 &= 0 \\
 m_2 \ddot{q}_2 + k_N(\bar{v}_0, \Omega_2) q_1 + [k_2 + k_N(\bar{v}_0, \Omega_2)] q_2 &= 0 \\
 \frac{J_1}{r_1^2} \ddot{q}_3 - k_T(\bar{v}_0, \Omega_2) q_5 &= 0 \\
 \frac{J_2}{r_2^2} \ddot{q}_4 + k_R q_4 + k_T(\bar{v}_0, \Omega_2) q_5 &= 0 \\
 \dot{q}_5 + \dot{q}_3 - \dot{q}_4 (1 + \frac{\bar{v}_0}{h_2}) - \frac{r_2}{h_2} \Omega_2 (q_1 + q_2) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Die damit berechneten Eigenfrequenzen sind in Abbildung 4.2 angegeben. Die zugehörige Eigenschwingungsform ist durch ein Symbol charakterisiert.

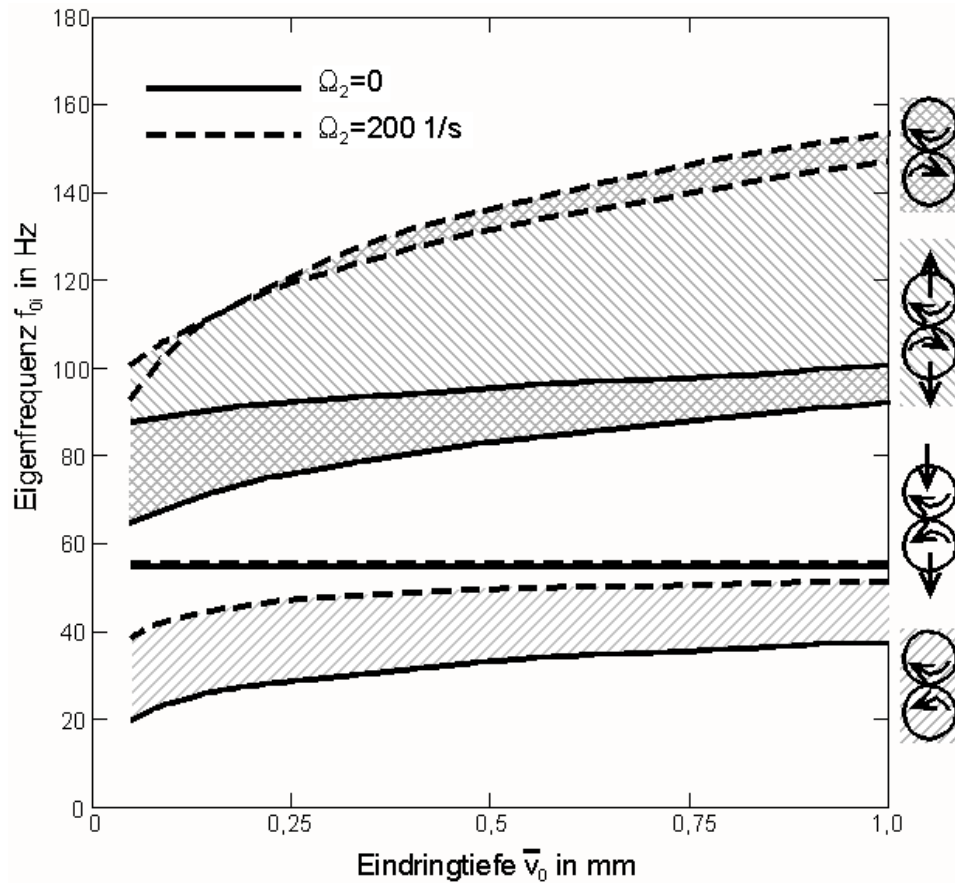


Abbildung 4.2: Berechnete Eigenfrequenzen des Versuchsstands in Abhängigkeit von den Betriebsparametern Antriebswinkelgeschwindigkeit Ω und Eindringtiefe v_0 (Vorspannung)

Es zeigt sich, dass die Eigenfrequenzen f_{03} und f_{04} deutlich von den Betriebsparametern abhängen. Die Schwingformen dieser beiden Eigenfrequenzen entsprechen Bewegungen der Walzen gegeneinander (Kontaktschwingungen). Dieses Verhalten des Versuchsstands wurde auch bei experimentellen Untersuchungen ermittelt. Die Eigenfrequenzen wurden jeweils im stationären Betriebszustand bei kleinen Schwingungen gemessen.





Eigenschwingform	Quadrate der Eigenkreisfrequenzen
	$\omega_{01}^2 = \frac{1}{4}k_R \left(1 - \frac{1}{4}\frac{k_R}{k_T}\right) \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2}\right); \frac{k_R}{k_T} \ll 1$ $\omega_{01}^2 = \frac{1}{2}k_T \left(1 + \frac{k_T}{k_R}\right) \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2}\right); \frac{k_T}{k_R} \ll 1$
	$\omega_{02}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right)$
	$\omega_{03}^2 = \omega_0^2 + \omega_N^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_2}\right) + k_N \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$
	$\omega_{04}^2 = \left[k_T + \frac{1}{4}k_R \left(1 - \frac{1}{4}\frac{k_R}{k_T}\right)\right] \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2}\right); \frac{k_R}{k_T} \ll 1$ $\omega_{04}^2 = \frac{1}{2} \left[k_R + k_T \left(1 + \frac{k_T}{k_R}\right)\right] \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2}\right); \frac{k_T}{k_R} \ll 1$

Tabelle 4.1: Abschätzungen der Eigenfrequenzen

Als Ursache der Brummer-Schwingungen mit etwa 100 bis 110 Hz wurde eine Eigenfrequenz des Versuchsstands vermutet. Bei einer Modalanalyse am Versuchsstand mit gekoppelten, aber nicht drehenden Walzen konnte jedoch keine Eigenfrequenz in der Nähe von 100 Hz gefunden werden. Erst weitere Modalanalysen bei verschiedenen Drehzahlen lieferten Eigenfrequenzen, die den in Abb. 4.2 gezeigten Abhängigkeiten entsprachen. Das heißt, dass nur bei rotierenden Zylindern und entsprechend eingestellter Vorlast die *Brummerfrequenzen* als Eigenfrequenzen auffindbar sind.

Der Einfluss der Steifigkeiten auf die Eigenfrequenzen lässt sich anhand der in Tabelle 4.1 angegebenen Abschätzungen erkennen. Dabei werden die vier Eigenschwingformen durch die dominierenden Walzenbewegungen genähert.

4.6 Selbsterregung auf Grund regenerativer Effekte

Die Selbsterregung des Systems kann mit Einführung einer weiteren Verformungsgröße, die - um eine Umlaufdauer $T = 2\pi/\Omega$ verzögert - an der Kontaktstelle wirkt, erfasst werden. Prinzipiell ermöglicht das in Abs. 2.3 hergeleitete Kontaktgesetz die Erfassung dreier wesentlicher Effekte, die die Ausbildung einer Welligkeit des Walzenbelages erklären:

- ein regenerativer Effekt aufgrund der Restverformung bei Austritt bzw. Wiedereintritt des Belags in die Kontaktzone,
- die Ausdehnung des Belags aufgrund der Erwärmung durch Dissipation bei Kontaktdurchlauf,
- veränderliche Werkstoffparameter wegen ihrer Temperaturabhängigkeit.

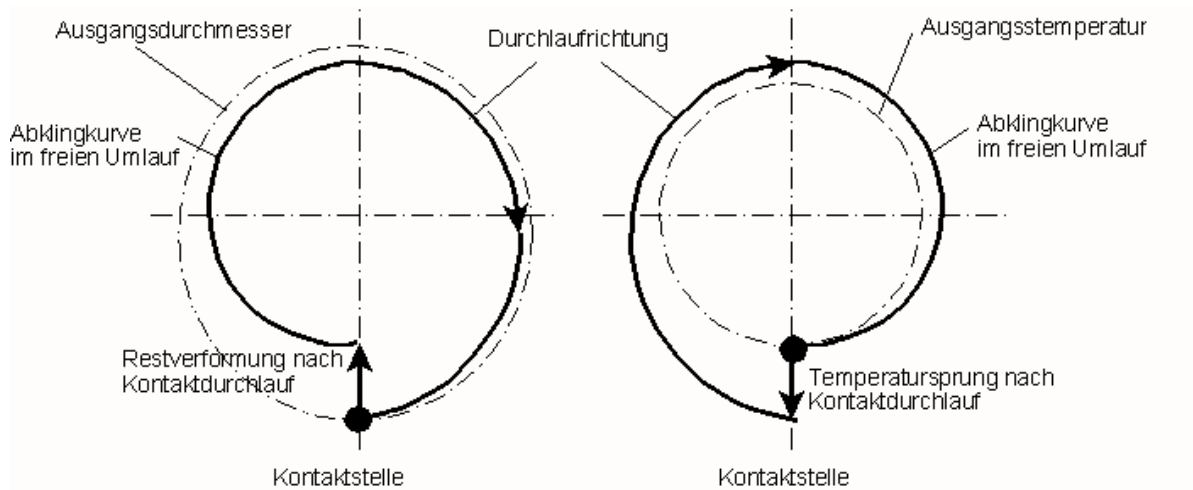


Abbildung 4.3: Restverformung und Relaxation (links) bzw. Temperatursprung und Abkühlung (rechts) eines Belagelements im Kontaktdurchlauf und freien Umlauf

Regenerative Ausbildung der Welligkeit durch eine zusätzliche Verschiebung

Vereinfachend wird als Modell eine beschichtete Walze betrachtet, die auf einer unendlichen starren Halbebene abrollt. Die Bewegungsgleichung mit einer zusätzlichen Verschiebung y_T am Walzenbelag und einer Vorspannkraft F_0 der Walze gegen die Ebene lautet:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky + k_N(y + y_T) = F_0 \quad (4.13)$$

Vereinfachend wird die zusätzliche Verschiebung y_T durch die Verschiebung y beim Verlassen des Kontakts im vorherigen Umlauf zum Zeitpunkt $(t - T)$ und vermindert mit dem Faktor ε beschrieben:

$$y_T(t) = \varepsilon y(t - T); T = 2\pi/\Omega \quad (4.14)$$

Diese Beschreibung ist in folgender Abbildung 4.3 wiedergegeben.

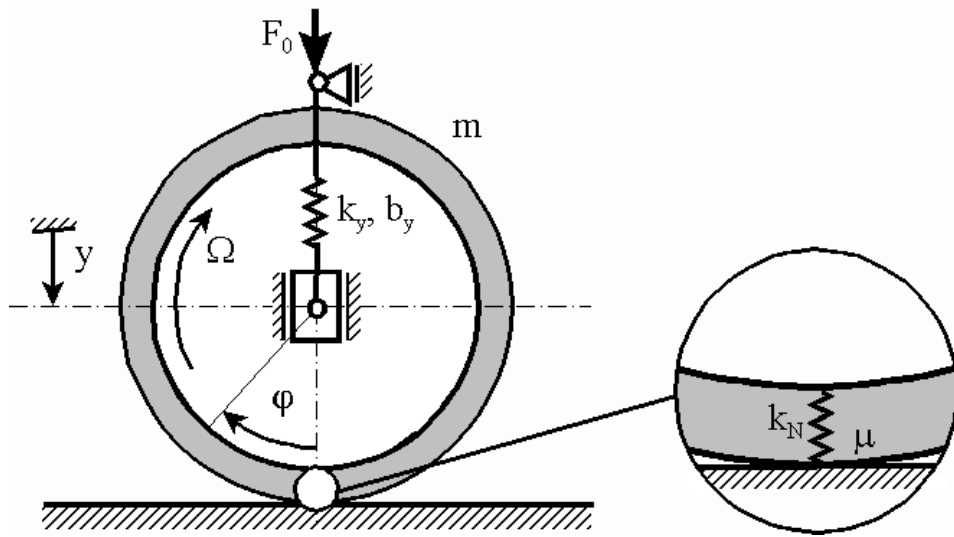


Abbildung 4.4: Modelldarstellung des vereinfachten Systems zur Instabilität auf Grund regenerativer Effekte

Die zusätzliche Verschiebung kann sowohl additiv ($\varepsilon > 0$: Berghypothese) als auch subtraktiv ($\varepsilon < 0$: Talhypothese) wirksam sein. Mit der Einführung einer dimensionslosen Zeit $\theta = \omega_K t$ und der Abkürzung $\kappa = (\omega_N/\omega_K)^2$ folgt daraus die Beziehung

$$y'' + y + \kappa \varepsilon y(\theta - 2\pi\omega_K/\Omega) = \Phi_0 \quad (4.15)$$

Der Strich kennzeichnet die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit. Der Exponentialansatz liefert durch den Verzögerungsterm eine transzendente Eigenwertgleichung:

$$\beta^2 + 1 = -\kappa \varepsilon \exp(-2\pi\beta\omega_K/\Omega) \quad (4.16)$$

deren unendlich viele komplexen Lösungen werden mit $\beta = a + ib$ in ihren Realteil und Imaginärteil weiter aufgelöst. Setzt man für die Ermittlung der Stabilitätsgrenzen den Realteil $a = 0$, so folgt daraus das Gleichungssystem zur Ermittlung der Stabilitätsgren-

zen als Kurven in der Ebene ω_K/Ω über $\kappa\varepsilon$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha^2 &= -\kappa\varepsilon \cos(2\pi\alpha\omega_K/\Omega) \\ 0 &= i\kappa\varepsilon \sin(2\pi\alpha\omega_K/\Omega) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Deren Lösung für verschiedene Ordnungen n lautet

$$\frac{\omega_K}{\Omega} = \frac{n}{\sqrt{1+\kappa\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_K}{\Omega} = \frac{2n+1}{2\sqrt{1-\kappa\varepsilon}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

Eine Betrachtung der ε -Umgebung dieser Lösungen identifiziert die angegebenen Bereiche stabiler Lösungen.

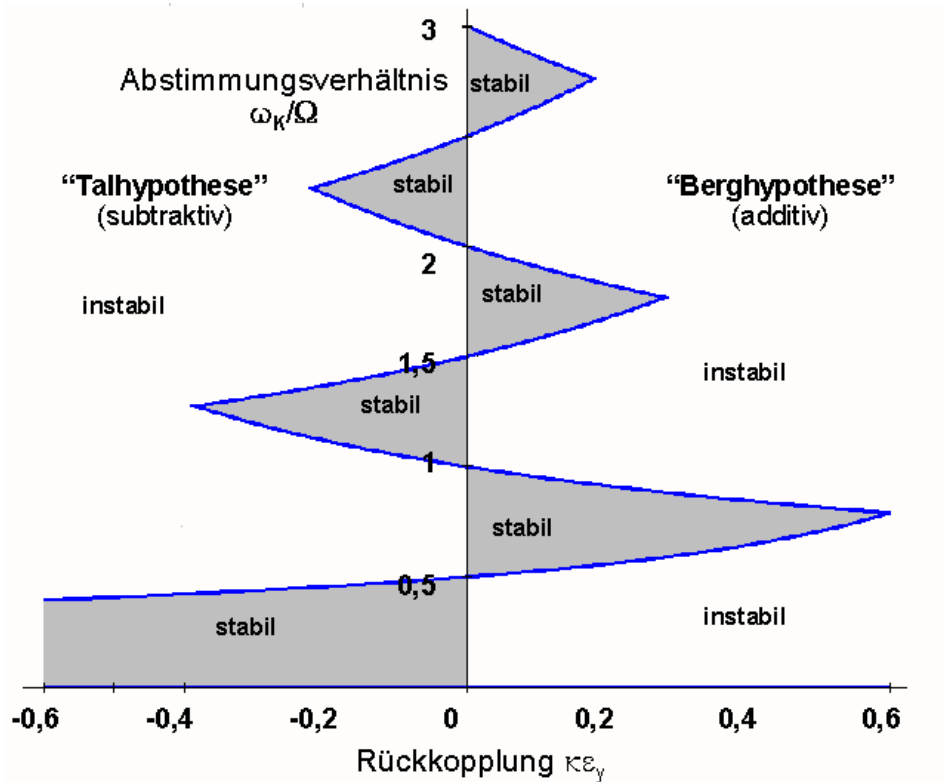


Abbildung 4.5: Stabile Bereiche für die additive und die subtraktive Entwicklung einer Welligkeit

Auffällig ist der Wechsel der stabilen Bereiche zwischen der additiven und der subtraktiven Halbebene:

- Stabile Bereiche in der subtraktiven Halbebene (Talhypothese) finden sich stets oberhalb der ganzzahligen Abstimmung von Eigenfrequenz zu Umlauffrequenz:
 $\varepsilon < 0: \frac{n}{\sqrt{1+\kappa\varepsilon}} < \frac{\omega_K}{\Omega} < \frac{2n+1}{2\sqrt{1-\kappa\varepsilon}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

- Stabile Bereiche in der additiven Halbebene (Berghypothese) finden sich stets unterhalb der ganzzahligen Abstimmung von Eigenfrequenz zu Umlauffrequenz:
 $\varepsilon > 0: \frac{2n-1}{2\sqrt{1-\kappa\varepsilon}} < \frac{\omega_K}{\Omega} < \frac{n}{\sqrt{1+\kappa\varepsilon}}, n = 1, 2, 3, \dots$

Dieses Ergebnis liefert eine plausible Erklärung für die Richtung der Wanderung von Oberflächenwelligkeiten im Falle der Instabilität in Umlaufrichtung für additive und entgegen der Umlaufrichtung für subtraktive Welligkeitsausbildung, vgl. [Lab02].

Regenerative Ausbildung der Welligkeit durch Änderung der Kontaktsteifigkeit

Ein weiterer Effekt wird durch die Änderung der Kontaktsteifigkeit k_N mit dem Zustand (y, \dot{y}) der Walze im vorangegangenen Kontaktdurchlauf $(t - T)$ beschrieben. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass mit zunehmender Verschiebung in jedem Kontaktdurchlauf etwas mehr Wärme dissipiert und mit dadurch steigender Temperatur die Steifigkeit etwas verringert wird:

$$k_N(t) \approx k_{N0} - \varepsilon k_{N1} y(t - T) \quad (4.19)$$

Die Bewegungsgleichung eines derartigen Systems lautet

$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) + [k_{N0} - \varepsilon k_{N1} y(t - T)]y(t) = F_0 \quad (4.20)$$

mit den obigen Vereinbarungen lautet diese Gleichung unter Vernachlässigung der Dämpfung

$$y''(\theta) + y(\theta) - \varepsilon \kappa y(\theta - 2\pi\omega_K/\Omega)y(\theta) = \Phi_0 \quad (4.21)$$

Zum Nachweis von Stabilität wird die Lösung in Zeitskalen entwickelt:

$$\begin{aligned} \theta_0 = \theta; \theta_1 = \varepsilon\theta; \theta_2 = \varepsilon^2\theta \\ \frac{d}{d\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial\theta_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial\theta_2} \\ \frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial\theta_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial\theta_0\partial\theta_1} + 2\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial\theta_0\partial\theta_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} \\ y(\theta) = y_0(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \varepsilon) + \varepsilon y_1(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \varepsilon) + \varepsilon^1 y_2(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Damit ergibt sich folgendes gestaffeltes Gleichungssystem für die Ordnungen von ε .

$$\begin{aligned} y_{0,00} + y_0 &= 0 \\ y_{1,00} + y_1 &= y_0(\theta_0 - 2\pi\Omega/\omega_0)y_0 - 2y_{0,01} \\ y_{2,00} + y_2 &= y_0(\theta_0 - 2\pi\Omega/\omega_0)y_1 + y_0y_1(\theta_0 - 2\pi\Omega/\omega_0) - 2y_{0,02} - y_{0,11} - 2y_{1,01} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dieses Gleichungssystem hat jeweils die homogenen Lösung

$$y_j = (X_j + iY_j)e^{i\theta_0} + (X_j - iY_j)e^{-i\theta_0}; j = 0, 1, 2 \quad (4.24)$$

Das Vorhandensein säkularer Terme auf der rechten Seite bestimmt die Stabilität/Instabilität der Lösung. Diese ist im vorliegenden Fall stabil, wenn sich auf der rechten Seite keine Terme befinden, die auch Lösung der homogenen Differenzialgleichung sind. Die homogene Lösung eingesetzt in die rechte Seite der zweiten Gleichung liefert die Bedingung

$$X_{0,1} = 0, Y_{0,1} = 0 \quad (4.25)$$

Und damit die Lösung

$$y_0 = (X_0 + iY_0)e^{i\theta_0} + (X_0 - iY_0)e^{-i\theta_0} \quad (4.26)$$

Eingesetzt liefert diese Gleichung die nächste Lösung:

$$\begin{aligned} y_1 &= (X_0^2 + Y_0^2)(e^{i2\pi\Omega/\omega_0} + e^{-i2\pi\Omega/\omega_0}) + (X_1 + iY_1)e^{i\theta_0} + (X_1 - iY_1)e^{-i\theta_0} \\ &\quad - \frac{1}{3}(X_0^2 - Y_0^2 + i2X_0Y_0)e^{i2\pi\Omega/\omega_0} - \frac{1}{3}(X_0^2 - Y_0^2 - i2X_0Y_0)e^{-i2\pi\Omega/\omega_0} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aus der nächsten rechten Seite folgt eine weitere Bedingung für die Abhängigkeit von X_0 und Y_0 von der langsamen Zeit θ_2 :

$$\begin{aligned} X_{0,2} + (X_0^2 + Y_0^2)(a(\omega_K/\Omega)X_0 - b(\omega_K/\Omega)Y_0) &= 0 \\ Y_{0,2} + (X_0^2 + Y_0^2)(b(\omega_K/\Omega)X_0 + a(\omega_K/\Omega)Y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

mit

$$\begin{aligned} a(\omega_K/\Omega) &= \sin(4\pi\omega_K/\Omega) - \frac{1}{3}\sin(6\pi\omega_K/\Omega) \\ b(\omega_K/\Omega) &= \frac{2}{3} + 2\cos(2\pi\omega_K/\Omega) + \cos(4\pi\omega_K/\Omega) - \frac{1}{3}\sin(6\pi\omega_K/\Omega) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Bedingung (4.28) lässt sich mit einer Umformung der komplexen Integrationskonstanten in Betrag und Argument

$$\begin{aligned} X_0(\theta_2) &= R(\theta_2) \cos(\delta(\theta_2)) \\ Y_0(\theta_2) &= R(\theta_2) \sin(\delta(\theta_2)) \end{aligned} \quad (4.30)$$

umformen in

$$\begin{aligned} R_{,2} + a(\omega_K/\Omega)R^3 &= 0 \\ R\delta_{,2} + b(\omega_K/\Omega)R^3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die Auswertung dieser Bedingung liefert $a(\omega/\Omega) > 0$ für stabile Bereiche und ist in folgender Abb. 4.6 dargestellt.

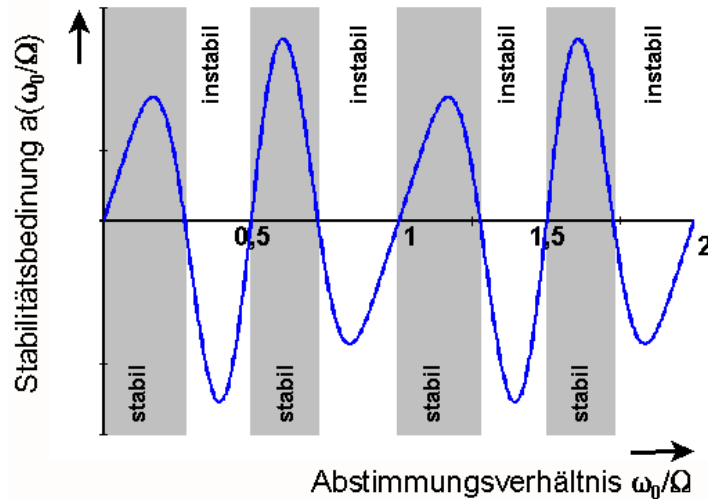


Abbildung 4.6: Stabile und instabile Bereiche für das (ungedämpfte) System mit regenerativer Änderung der Steifigkeit

4.7 Reibungsbedingte Selbsterregung

Selbsterregte Schwingungen werden in zahlreichen technischen Systemen durch Reibung induziert. Eine anschauliche Erklärung zu diesem Phänomen ist in [MP02] gegeben. Wird in einer Halbschwingung dem System mehr Energie zugeführt, als in der anderen Halbschwingung Energie entzogen wird, dann ist Selbsterregung möglich. Die Selbsterregung tritt jedoch erst dann ein, wenn diese Überschussenergie groß genug ist, um die im System vorhandenen Dämpfungen zu überwinden, vgl. [MP02].

Bei Reibungskräften bzw. Reibungsmomenten (im Folgenden nur noch Reibungskräfte)

im System, deren Größe nicht symmetrisch bezüglich der beiden Halbschwingungen ist, kann dieser Effekt eintreten. Das klassische Beispiel dafür ist der Schwinger mit fallender Reibkennlinie. Dabei wird angenommen, dass die Reibungskraft mit zunehmender Relativgeschwindigkeit zwischen den Kontaktpartnern geringer wird. Dieses Verhalten sorgt dafür, dass die Halbschwingung der gleichsinnigen Bewegung der Kontaktpartner stärker unterstützt wird als die Halbschwingung der gegensinnigen Bewegung der Kontaktpartner. Beispiele sind das Reibungspendel und die schwingende Masse auf einem Transportband.

Doch Selbsterregung von Reibschwingern ist auch ohne fallende Reibkennlinie möglich, vgl. [Bro95], [Wal95]. Die Beziehung zur Berechnung der Reibkraft

$$\begin{aligned}
 F_T &= \mu F_N \text{sign}(\dot{u}) \\
 F_N = \text{konst.} : F_T &= \mu(\dot{u}) F_N \text{sign}(\dot{u}) \\
 \mu = \text{konst.} : F_T &= \mu F_N(u, v, \dot{u}, \dot{v}) \text{sign}(\dot{u})
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

zeigt eine weitere Möglichkeit der Verstimmung der beiden Halbschwingungen. Diese kann bei konstantem Reibwert μ aus einer schwankenden Normalkraft folgen. Zusätzlich ist eine Kopplung von Normal- und Tangentialkraftproblem im gleichen Takt notwendig, wie sie bei Koppelschwingungen gegeben ist. In [Bro95] ist die Kopplung der Bewegungen durch einen zusätzlichen Körper mit geneigter Steifigkeitshauptachse realisiert, in [Wal95] wird die Kopplung von Normal- und Tangentialrichtung durch die Kreismomente als wesentlich und charakteristisch für einen Wickler erarbeitet. Unter Benutzung der in Abs. 2.2 erarbeiteten Systematik gekoppelter Rotoren, kann eine Reihe selbsterregungsfähiger Rotorsysteme nach den Beispielen in [Bro95] und [Wal95] entwickelt werden.

Modellgruppe 1 - geneigte Steifigkeitshauptachsen

Gemäß den Ausführungen zur Modellbildung und Untersuchung des Kontaktverhaltens genügt die Betrachtung eines Systems Rotor - Ebene als Minimalmodell. Die mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Ebene ist in diesem Fall die Energiequelle des Systems. Der Rotor wird durch Reibung an der Kontaktstelle mitgenommen. Die Konfiguration des Systems ist in 4.7 angegeben.

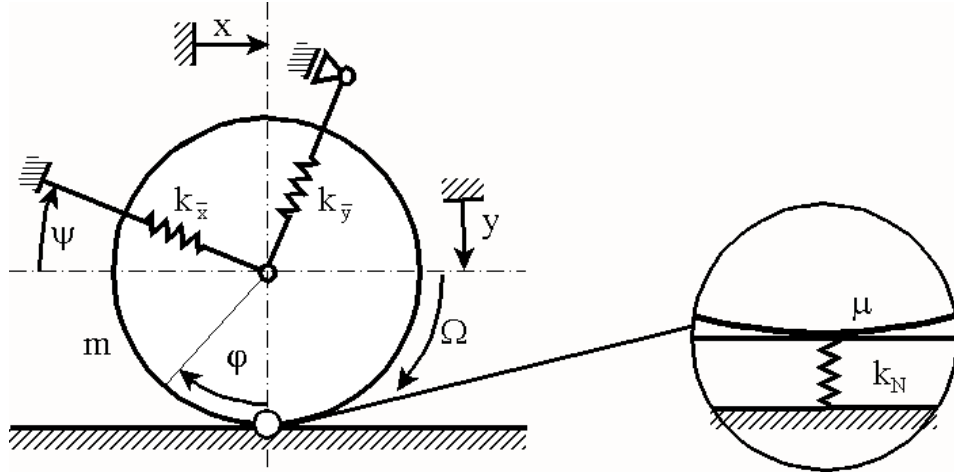


Abbildung 4.7: Rotor mit geneigten Steifigkeitshauptachsen gegen Ebene

Der Reibungskoeffizient μ sei konstant. Die Bewegungsgleichung des ungedämpften Systems lautet damit (vgl. Tab. 2.3)

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2(1 - \alpha \cos(2\psi)) + \omega_N^2 & \omega_0^2 \alpha \sin(2\psi) \\ \omega_0^2 \alpha \sin(2\psi) + \mu \omega_N^2 \text{sign}(\dot{u}) & \omega_0^2(1 + \alpha \cos(2\psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ \mu f_0 \text{sign}(\dot{u}) \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Mit den Parametern gemäß Tab. 2.3:

$$\omega_0^2 = \frac{k_x + k_y}{m}; \quad \omega_N^2 = \frac{k_N}{m}; \quad \alpha = \frac{k_x - k_y}{k_x + k_y} \quad (4.34)$$

Gemäß dem Betriebszustand eines Systems mit Friktionsantrieb können die Zustände

- getriebene Walze mit positiver Tangentialkraft : $\dot{u} > 0$
- Leerlauf: $\dot{u} = 0$
- treibende Walze mit negativer Tangentialkraft: $\dot{u} < 0$

unterschieden werden. Die Untersuchung der Teilsysteme *treibend* und *getrieben* zeigt instabile Bereiche. Der Fall Förderbetrieb oder Leerlauf ohne Schlupf zwischen den beiden Walzen bedeutet, dass das System bei einer Störung in den Bereich *getrieben* oder *treibend* ausweicht. Damit wird zumindest das ungedämpfte System in den gleichen Bereichen instabil. Das folgt aus der Aussage in [MP02], dass das System instabil wird, wenn eines der beiden Teilsysteme mit positiver oder negativer Relativgeschwindigkeit instabil wird. Das heißt, es genügt der Nachweis von Eigenwerten mit positivem Realteil für eines der beiden Teilsysteme, um Instabilität des Systems zu zeigen. Mit der Einführung einer dimensionslosen Zeit $\theta = \omega_0 t$ und der Abkürzung $\kappa = (\omega_N/\omega_0)^2$ lautet die

Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix} y'' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \alpha \cos(2\psi) + \kappa & \alpha \sin(2\psi) \\ \alpha \sin(2\psi) + \mu \kappa \text{sign}(\dot{u}) & 1 + \alpha \cos(2\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \mu \Phi_0 \text{sign}(\dot{u}) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Der Strich kennzeichnet die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit θ . Mit dem Exponentialansatz

$$\mathbf{x}(\theta) = \hat{\mathbf{x}} \exp(\beta \theta) \quad (4.36)$$

folgt daraus die Eigenwertgleichung für die Teilsysteme mit nur noch vier Parametern.

$$\beta^4 + (2 + \kappa)\beta^2 + 1 - \alpha^2 + \kappa(1 + \alpha \cos(2\psi) - \mu \text{sign}(\dot{u})\alpha \sin(2\psi)) = 0 \quad (4.37)$$

mit den Lösungen

$$\beta_{1,2}^2 = -1 - \frac{\kappa}{2} \pm \frac{\kappa}{2} \sqrt{1 + 4 \left(\frac{\alpha}{\kappa} \right)^2 - 4 \frac{\alpha}{\kappa} [\cos(2\psi) - \mu \text{sign}(\dot{u}) \sin(2\psi)]} \quad (4.38)$$

Diese führen zu rein imaginären Lösungen in der Umgebung der Eigenwerte

$$1 - \alpha \leq \beta_1^2 \leq 1 + \alpha; \quad 1 + \kappa - \alpha \leq \beta_2^2 \leq 1 + \kappa + \alpha \quad (4.39)$$

Bedingung für die Stabilität dieser Lösung der Eigenwertgleichung ist, dass der Wurzel Ausdruck positiv bleibt. Diese Bedingung führt auf eine quadratische Ungleichung für den Parameter (α/κ) , deren Koeffizienten noch vom Lagewinkel ψ und vom Reibwert μ abhängen. Für oben genannte stabile Lösungen muss gelten

$$\left(\frac{\alpha}{\kappa} \right)^2 - \frac{\alpha}{\kappa} (\cos(2\psi) - \mu \text{sign}(\dot{u}) \sin(2\psi)) + \frac{1}{4} > 0 \quad (4.40)$$

Die beiden Lösungsäste der zugehörigen quadratischen Gleichung schließen die in Abb. 4.8 angegebenen Bereiche in einer Ebene $\psi, (\alpha/\kappa)$ ein, in denen instabile Lösungen existieren. Die Ausdehnung dieser Bereiche nimmt mit steigendem Reibbeiwert μ zu. Alle diese Bereiche beginnen im Punkt

$$\psi = 0; \alpha/\kappa = (k_x - k_y)/k_N = 0,5 \quad (4.41)$$

Die Lage der instabilen Parameterbereiche in ψ -Richtung ist abhängig vom Vorzeichen des Schlupfes. Beim Lastfall *getrieben* beginnt der instabile Bereich bei $\psi=0^\circ$ und nähert sich mit zunehmendem μ dem Wert 90° an. Beim Lastfall *treibend* beginnt der instabile Bereich für $\alpha < 0$ mit 0° und nähert sich mit zunehmendem μ dem Wert -90° .

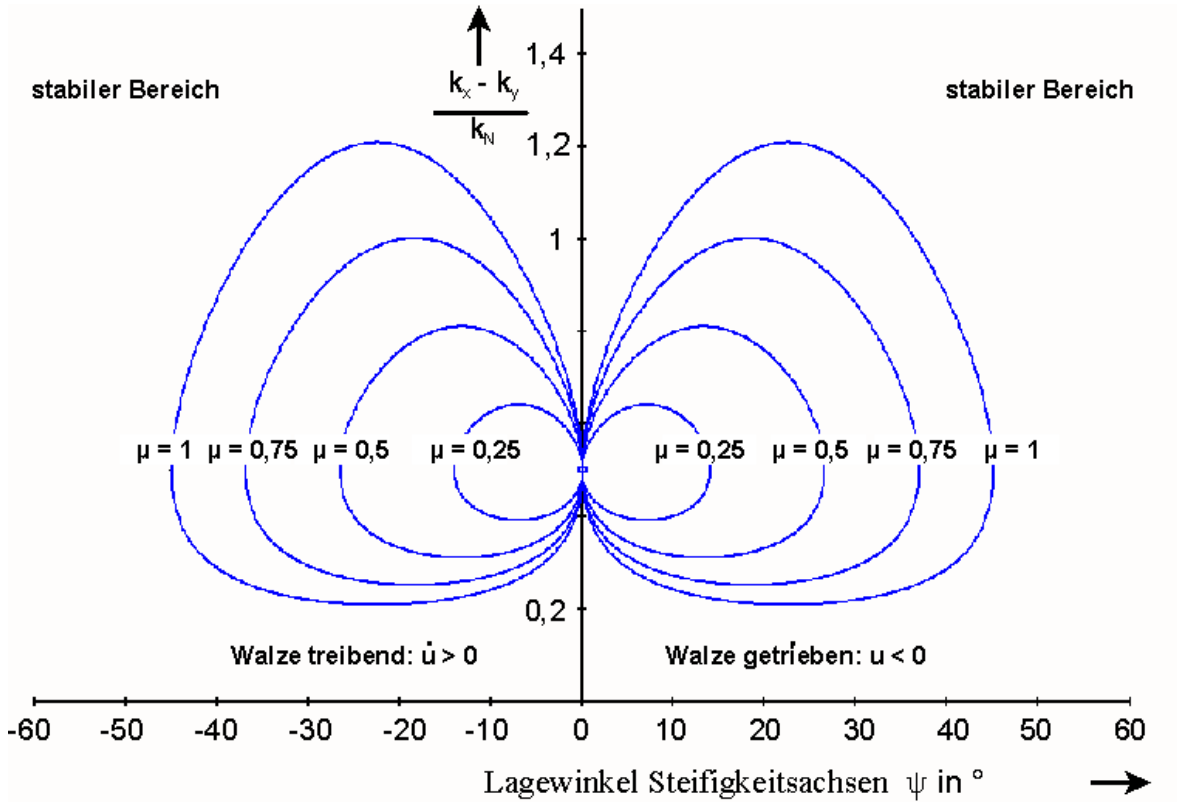


Abbildung 4.8: Stabile Parameterbereiche des Systems Rotor-Ebene mit geneigten Steifigkeitshauptachsen

In den instabilen Bereichen liefert die Lösung der Eigenwertgleichung ein vollständiges System der vier Quadratwurzeln zweier konjugiert komplexer Zahlen:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -a + ib; & \beta_2 &= -a - ib \\ \beta_3 &= a + ib; & \beta_4 &= a - ib \end{aligned} \quad (4.42)$$

Das heißt, die instabile Eigenbewegung erfolgt mit einer Frequenz b (die vorher zwei Frequenzen der Kontaktschwingung und der Reibschwingung fallen zusammen) und hat einen aufklingenden ($+a$) und einen abklingenden ($-a$) Zweig. Mit den waagerechten und senkrechten Tangenten an die Grenzkurven der instabilen Gebiete lässt sich eine Stabilitätsbedingung finden, die nur noch vom Reibwert abhängt. Instabile Lösungen existieren nur für

$$-\arctan(\mu) < \psi < \arctan(\mu); \quad \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2} - \frac{\mu}{2} < \frac{k_x - k_y}{k_N} < \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2} + \frac{\mu}{2} \quad (4.43)$$

so dass bei ausreichend großer Kontaktsteifigkeit im Verhältnis zur Lageranisotropie keine Instabilität auftritt.

Modell 2 - Kopplung durch Kreismomente

Das Modell entspricht in etwa dem in [Wal95]. Die Anordnung des Rotors ist jedoch so gewählt, dass dieser auf der Ebene aufliegt und abrollt.

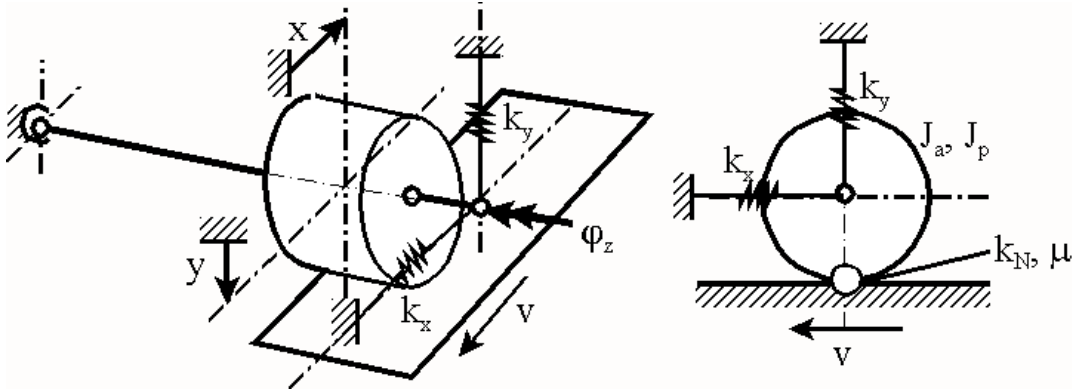


Abbildung 4.9: Wicklermodell mit Kreiselwirkung, siehe [Wal95]

Die Bewegungsgleichung des Systems lautet:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_x \\ \ddot{\varphi}_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\vartheta\omega_0 & J_p\Omega/J_a \\ -J_p\Omega/J_a & 2\vartheta\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 + \omega_N^2 & 0 \\ \mu\omega_N^2\text{sign}(\dot{u}) & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Mit der Einführung einer dimensionslosen Zeit $\theta = \omega_0 t$ und den Abkürzungen $\kappa = (\omega_N/\omega_0)^2$ und $\gamma = (J_p\Omega)/(J_a\omega_0)$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_x'' \\ \varphi_y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\vartheta & \gamma \\ -\gamma & 2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x' \\ \varphi_y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + \kappa & 0 \\ \mu\kappa\text{sign}(\dot{u}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

Mit dem Exponentialansatz folgt daraus eine Eigenwertgleichung

$$\beta^4 + 4\vartheta\beta^3 + (1 + \kappa + \gamma^2 + 4\vartheta^2)\beta^2 + (\mu\text{sign}(\dot{u})\gamma\kappa + 4\vartheta + 2\kappa\vartheta)\beta + 1 + \kappa = 0 \quad (4.46)$$

Diese besitzt Lösungen mit positivem Realteil für die beiden Fälle

- *getrieben* $\dot{u} < 0$ und
- *treibend* $\dot{u} > 0$.

Gemäß dem vorigen Beispiel werden diese beiden Fälle auf die Existenz von Eigenwerten mit positivem Realteil untersucht. Für das ungedämpfte System gilt die Eigenwertgleichung

$$\beta^4 + (1 + \kappa + \gamma^2)\beta^2 + (\mu\text{sign}(\dot{u})\gamma\kappa)\beta + 1 + \kappa = 0 \quad (4.47)$$

Dabei sind die Eigenschwingungen des ungedämpften Systems immer instabil, bereits bei einer Kopplung durch kleine Kreismomente. Wird eine schwache Lagerdämpfung hinzugefügt, so ergeben sich stabile Bereiche bei geringen Kreismomenten. Eine derartige Lösung und die dazugehörigen Parameter sind in Abb. 4.10 angegeben.

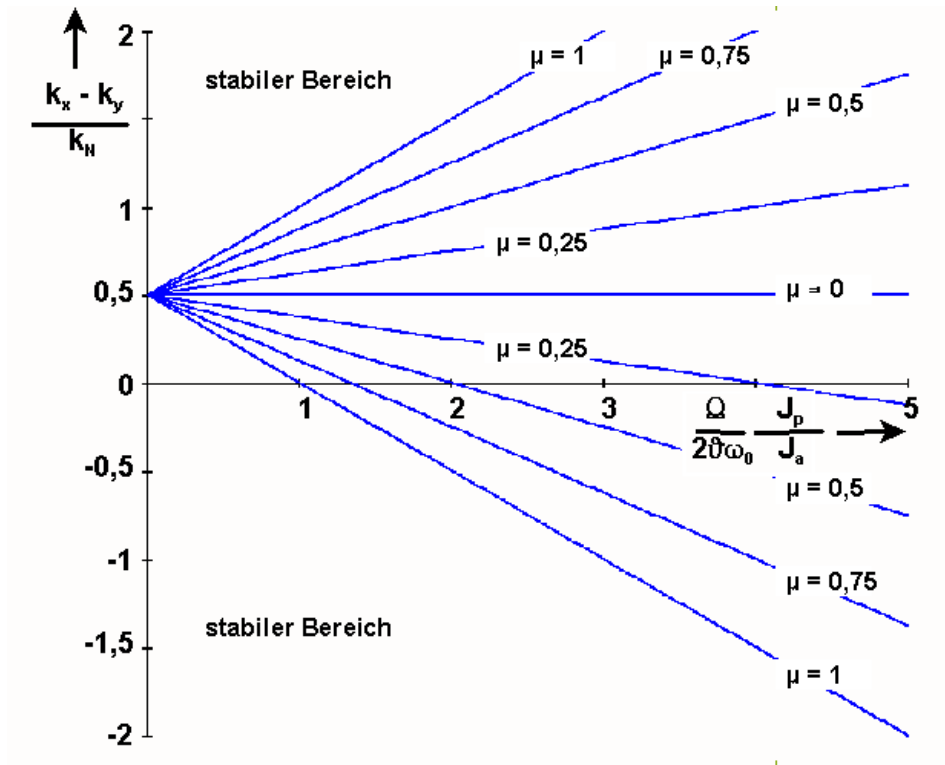


Abbildung 4.10: Stabile Parameterbereiche des Systems Rotor-Ebene mit Kreiselwirkung

4.8 Stabilitätsbetrachtung für den Versuchsstand

Die vorliegenden Messergebnisse in Abs. 3.5 und die Untersuchungen in Abs. 4.6 deuten darauf hin, dass der Effekt der Profilbildung durch Wärmedehnung tatsächlich dominiert. Betrachtet man die Gleichung (2.27) zur Berechnung der Kontaktkraft in radialer Richtung, zeigt sich der entscheidende Einfluss der Eindringtiefe v_0 .

$$F_N(v_0, \Omega_2) = \frac{4}{3} \kappa_{N1} \sqrt{2R_0} v_0^{3/2} + 2\kappa_{N2} (R_2 \Omega_2 \tau_2)^2 \left[\sqrt{\frac{v_0}{2R_0}} \left(1 + \exp \left(-\frac{2\sqrt{2R_0} v_0}{R_2 \Omega_2 \tau_2} \right) \right) - \frac{R_2 \Omega_2 \tau_2}{R_0} \right] \quad (4.48)$$

Es erscheint daher zur analytischen Untersuchung der Selbsterregung ausreichend, diejenige Eigenschwingungsform aus dem Modell zu extrahieren, die eine wesentliche Ände-

rung dieser Größe beinhaltet und damit das Kontaktverhalten bestimmt. Durch die Einführung der relativen Koordinate $q = q_1 + q_2$ erhält man aus Gleichung (4.12) nur noch eine Gleichung zur Beschreibung der dritten Eigenschwingungsform in Abb. 4.2. Gekoppelt mit einer Beziehung zur Wärmedehnung q_T des Belages infolge der bei Kontaktdurchlauf dissipierten Energie ergeben sich folgende Differenzialgleichungen mit nacheilendem Argument

$$\begin{aligned} \ddot{q}(t) + 2\delta\dot{q}(t) + (\omega_0^2 + \omega_N^2(\bar{v}_0, \Omega_2)) q(t) + \omega_N^2(\bar{v}_0, \Omega_2) q_T(t - T) &= 0 \\ \dot{q}_T(t) - \frac{h_2\alpha_2}{\Delta m_2 c_2} \frac{\partial P}{\partial v_0} \Big|_{\bar{v}_0} q(t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Das um die Umlaufdauer $T = 2\pi/\Omega_2$ nacheilende Argument beschreibt die Wirkung der Wärmedehnung infolge Energiedissipation im vorigen Kontaktdurchlauf auf den folgenden Kontaktdurchlauf zum Zeitpunkt t . Mit dem Lösungsansatz $q_i(t) = \hat{q}_i e^{\lambda t}$ folgt die transzendente Eigenwertgleichung

$$\lambda^3 + 2\delta\lambda^2 + (\omega_0^2 + \omega_N^2)\lambda + \omega_N^2 \frac{h_2\alpha_2}{\Delta m_2 c_2} \frac{\partial P}{\partial v_0} \Big|_{\bar{v}_0} e^{-(\lambda + \delta_\vartheta)T} = 0 \quad (4.50)$$

deren Lösungen mit positivem Realteil aufklingende und damit instabile Bewegungen der Walzen bedeuten. Abbildung 4.11 zeigt die daraus ermittelte Stabilitätskarte. Die instabilen Bereiche sind grau hinterlegt.

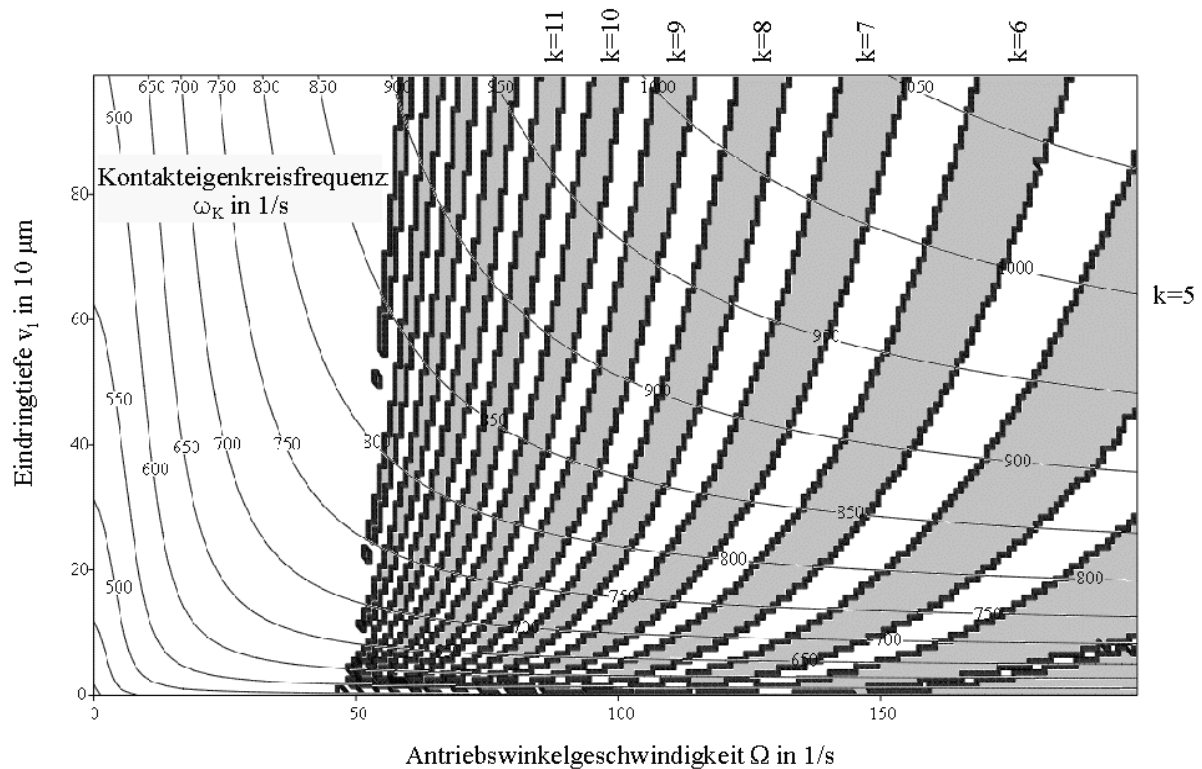


Abbildung 4.11: Stabilitätskarte für das Versuchsstandmodell bei regenerativer Wärmedehnung

Dieses einfache Modell liefert die Aussage, dass bei einer Abstimmung der Antriebswinkelgeschwindigkeit zur Kontakteigenkreisfrequenz von etwa $\omega_K \approx n\Omega_2$ eine Temperatur- und Oberflächenwelligkeit der Ordnung n auf der Walze abgebildet wird und diese aufklingt. Die Breite der instabilen Bereiche und das Aufklingverhalten der Welligkeit wurde in den Experimenten bestätigt, siehe Tabelle 3.7. Möglichkeiten der Einflussnahme auf das Stabilitätsverhalten zeigen die Terme in Gleichung (4.50):

- Verschieben der kritische Eigenfrequenz durch Anpassen der Lager- und/ oder der Belagsteifigkeit
- Erhöhung der Lagerdämpfung
- Verbesserung des Abklingverhaltens des Temperaturproblems durch Kühlung
- Unterbinden der Profilausbildung durch verbesserte Wärmeleitung im Belag.

Die für die jeweilige Maschine geeignete Methode ist unter Berücksichtigung konstruktiver und technologischer Bedingungen festzulegen.

Kapitel 5

Zusammenfassung

An Anlagen der Druck- und Papierindustrie sowie an Wicklern und Spulern wurden mit zunehmender Bearbeitungsgeschwindigkeit verstärkt selbsterregte Schwingungen radial gekoppelter Walzenpaare beobachtet. Bisherige Betrachtungen der Rotordynamik konzentrierten sich auf nichtlineare Lagerkräfte als wesentliche Ursache für derartige Schwingungen. Mit diesen vorliegenden Analysen ließen sich jedoch Effekte wie die Entstehung von welligen Oberflächenprofilen an Walzen, gekoppelt mit einer Temperaturwelligkeit, nicht erklären.

Die vorliegende Arbeit richtete den Fokus auf die Kontaktstelle, deren geometrisch nicht-lineare Kinematik als wesentlich für derartige Effekte erkannt und beschrieben wurde. Freiheitsgradkopplungen durch nicht symmetrische Walzen- bzw. Lageranordnungen lieferten weitere Anregungsmechanismen für selbsterregte Schwingungen. Um diese verschiedenen Ursachen zu trennen, wurden in einem ersten Schritt insgesamt vier Gruppen von Rotormodellen entwickelt. Diese Systematik erlaubte die Zuordnung typischer Defektparameter zu diesen Modellgruppen jeweils als Abweichung von einem idealen Referenzsystem.

Die Zusammenstellung von Rotormodellen wird auf starre Rotoren beschränkt. Die Bewegungsgleichungen und mögliche Anwendungen des ebenen Modells, des Modells mit fliegender Lagerung und des elastisch gestützten Starrkörpers wurden systematisch entwickelt. Daran wurde eine Diskussion möglicher Abweichungen des Rotors von einem idealen System in Form von Defektparametern eingeführt und deren Auswirkungen in den Bewegungsgleichungen erarbeitet.

Mit der Kopplung des Rotormodells mit einem Kontaktpartner starre Ebene, starrer Rotor bzw. elastisch gestützter starrer Rotor entstehen Modelle zur gezielten Untersuchung einzelner Mechanismen der Schwingungsentstehung in Systemen gekoppelter Rotoren. Es wird der Kontaktfall Stahlwalze gegen polymerbeschichtete Walze betrachtet.

Kleine geometrische Größen und kleine Verschiebungen, sowie die geringe Steifigkeit des Polymerbelags im Vergleich zum Stahlkern erlauben die Entwicklung der Verschiebungen über der Kontaktzone in Polynomen niedrigen Grades. Ebenso wird die näherungsweise Entkopplung von Kontaktdurchlauf und freiem Umlauf möglich. Damit lassen sich die Kontaktbeziehungen weitgehend analytisch auswerten und so ein geeignetes Kontaktmodell in Form resultierender Kontaktkräfte bzw. Kontaktsteifigkeiten entwickeln.

Am Fraunhofer Institut Werkzeugmaschinen und Umformtechnik wurde ein Versuchstand zur experimentellen Unterstützung der theoretischen und numerischen Analysen entworfen und gebaut. Bei der Inbetriebnahme wurden statische Verschiebungsmessungen am Walzenpaar und Modalanalysen am Gestell, an einer einzelnen Walze und an den nichtdrehenden Walzen im Kontakt durchgeführt. Dabei zeigte sich eine recht gelungene Entkopplung der Starrkörpereigenschaften der Walzen von Gestelleigenschaften und den elastischen Moden der Walzen. Lediglich in Achsrichtung der Walzen wurde eine deutliche Kopplung von Gestell und Walzen in den Schwingformen ermittelt.

An diese Vorversuche schlossen sich Messungen im stationären Walzenlauf zur Entwicklung von Temperatur und Belagdicke durch den Kontaktdurchlauf an. Die Untersuchungen von Schwingungsphänomenen konzentrierte sich dann auf die Entwicklung eines Polygonprofils über dem Umfang der beschichteten Walze nach einigen Minuten Versuchsdauer. Diese Schwingungen wurden in engen Drehzahlbändern bei etwa ganzzahligem Verhältnis der Kontakteigenfrequenz zur Antriebsfrequenz beobachtet. Es wurde jeweils ein phasengleiches Verschiebungs- und Temperaturprofil mit acht bzw. neun Ecken abgebildet.

Die Selbsterregung bei Reibung mit konstantem Reibwert wurde am Kontaktpaar Walze gegen Ebene untersucht. Als Kopplungen wurden schräggestellte Lagersteifigkeiten und Kreismomente betrachtet. Für beide Modelle konnte eine Stabilitätskarte in Abhängigkeit von typischen Systemparametern ermittelt werden. An einem ähnlichen System mit nur einem Freiheitsgrad der Walzenbewegung und einer Walzendrehung mit konstanter Drehzahl wurden regenerative Effekte untersucht. Für eine fortgesetzte zunehmende Ausdehnung bzw. Eindrückung des Belags bei Kontaktdurchlauf konnte ebenfalls eine anschauliche Stabilitätskarte entwickelt werden. Für die fortgesetzte Erweichung des Belagwerkstoffs mit zunehmender Erwärmung mit dem gleichen Modell konnten lediglich stabile Bereiche für das Verhältnis von Kontakteigenfrequenz zu Antriebsfrequenz ermittelt werden.

Es wird ein ebenes Modell des Versuchstands mit dem Freiheitsgrad vier bzw. zwei entwickelt. Die Trägheitsparameter wurden aus dem CAD-Modell ermittelt, für die Steifigkeiten der Lagersitze im Gestell (Federrahmen) lagen Messwerte vor. Die Parameter des Belagwerkstoffs wurden durch den Abgleich von Berechnung und Messung für den

stationären Lauf angepasst. Mit den so gefundenen Parametern konnte die Berechnung von Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Kontaktkraft und der Walzendrehzahl erfolgen. Ebenso wurde numerisch eine Stabilitätskarte für die gekoppelten Walzen über der Kontaktkraft und der Walzendrehzahl ermittelt. Die Berechnungen erlaubten die Interpretation der experimentellen Ergebnisse und zeigten eine gute Übereinstimmung.

Die Arbeit entstand im Wesentlichen während der Bearbeitung des Forschungsvorhabens *Untersuchungen zur nichtlinearen Dynamik beim radialen Kontakt zweier Rotoren* an der Technischen Universität Chemnitz. Dieses Thema wurde von der Volkswagenstiftung von 1999 bis 2002 im Schwerpunktprogramm *Untersuchung nichtlinear-dynamischer Effekte in produktionstechnischen Systemen* mit dem Aktenzeichen I/74 214 gefördert.

Literaturverzeichnis

- [Ahr93] AHRENS, R.: Innere Variable in linear-viskoelastischen Schwingungssystemen. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1993. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [AJ88] ANSORGE, H. ; JENTZSCH, J.: Beanspruchung und Betriebsverhalten von gummierten Walzen. 1988. (Wissenschaftliche Schriftenreihe der TU Karl-Marx-Stadt). – Forschungsbericht
- [Bae00] BAEHR, H.D.: *Thermodynamik*. Bd. 10.Aufl. Springer-Verlag, 2000
- [Bat80] BATRA, R.C.: Rubber Covered Rolls - The Nonlinear Elastic Problem. In: *Transactions of the ASME*, 47 (1980), S. 82–86
- [Bat81] BATRA, R.C.: Quasistatic Indentation of a Rubber-Covered Roll by a Rigid Roll. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.17 (1981), S. 1823–1833
- [BB82] BAPAT, C. ; BATRA, R.C.: Indentation of a viscoelastic Rubber Covered Roll by a Rigid Plane Surface. In: *Mechanics Research Communications* Vol.9,No. 4 (1982), S. 265–272
- [BB84] BAPAT, C. ; BATRA, R.C.: Finite Plane Strain Deformations of Nonlinear Viscoelastic Rubber Covered Rolls. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.20 (1984), S. 1911–1927
- [Ben99] BENDER, S.A. C.M.; O. C.M.; Orszag: *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. Springer, 1999
- [Bra93] BRAAT, G.F.M.: *Theory and Experiments on Layered Viscoelastic Cylinders in Rolling Contact*, Delft University of Technology, Dissertation, 1993
- [Bro95] BROMMUNDT, E.: Ein Reibschwinger mit Selbsterregung ohne fallende Reibkennlinie. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* 75/11 (1995), S. 811–820

- [Bro98] BROMMUNDT, E.: Rollen einer starren Walze auf einem elastischen Streifen. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* 78 (1998), S. 97–S100
- [Bro00] BROMMUNDT, E.: Stability of Motion of an Elastic Wheel Rolling on a Rigid Plane. In: *Machine Dynamics Problems*, Vol. 24, No. 1 (2000), S. 33–45
- [Buf59] BUFLER, H.: Zur Theorie der rollenden Reibung. In: *Ingenieur-Archiv* XXVII. Band, 3. Heft (1959)
- [Buf61] BUFLER, H.: Beanspruchung und Schlupf beim Rollen elastischer Walzen. In: *Forschung im Ingenieur-Wesen* 4/27 (1961), S. S. 121–126
- [Gas02] GASCH, R.: *Rotordynamik*. Springer, 2002
- [Göb92] GÖBEL, S.: Einsatz und Aussagekraft von Schwingungsmessungen an Papiermaschinen. In: *Das Papier* 1 (1992)
- [GK01] GLÖCKNER, E. ; KELLER, B.: Verfahren und Anordnung zur Kompensation von Schwingungen rotierender Bauteile. In: *Patentschrift* DE 199 63 945 C1 (2001)
- [Gri90] GRIGULL, U. (Hrsg.): *Wärmeleitung*. Bd. 2. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1990
- [Gru93] GRUNAU, R.: Zur Wechselwirkung zwischen Schwingungen, Filzmarkierungen und Walzenwellungen in Pressenpartien von Papiermaschinen. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1993. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [Gru97] GRUNAU, E.: Schwingungsminderung an Pressenpartien von Papiermaschinen durch dynamische Zusatzsysteme. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1997. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [Ham97] HAMMELE, W.: Ermittlung der elastischen und viskoelastischen Kennwerte von Polymerwerkstoffen durch Rollkontaktversuche. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1997. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [HD94] HOLZWEISSIG ; DRESIG, H.: *Lehrbuch Maschinendynamik*. Fachbuchverlag Leipzig, 1994
- [Ka99] KIVINEN, J.-M. ; AL. et: A Dynamically Stable Nip Loading Mechanism for Paper Finishing Systems. In: *Tenth World Congress On The Theory of Machines and Mechanisms*. Oulu, Finland, 1999, S. 1353–1360

- [Kah95] KAHN, P.B.: *Mathematische Methoden für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum Akademischer Verlag, 1995
- [Kal73] KALKER, J.J.: On the Rolling Contact of Two Elastic Bodies in the Presence of Dry Friction. Delft (Niederlande), 1973. – Forschungsbericht
- [KB98] KNOTHE, K. (Hrsg.) ; BÖHM, F. (Hrsg.): *Hochfrequenter Rollkontakt der Fahrzeugräder*. Weinheim : Wiley-VCH, 1998
- [Kus98] KUSTERMANN, M.: Verfahren und Vorrichtung zur Dämpfung von Kontaktschwingungen. In: *Offenlegungsschrift* DE 196 52 769 A1 (1998)
- [Lab02] LABRENZ, H.C.: Stabilität des Walzenlaufes bei Druck- und Papiermaschinen. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 2002. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [Lan01] LANGEMANN, D.: Numerische Analyse abrasiv verschleißender mechanischer Systeme. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 2001. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [Mar94] MARKWORTH, M.: Querwellen auf kaltgewalztem Band. In: *Stahl und Eisen* 114 11 (1994), S. 101–109
- [Mei97] MEINDERS, T.: Rotordynamik eines elastischen Radsatzes. Universität Stuttgart, 1997. – DFG Zwischenbericht
- [Mei99] MEINDERS, T.: Einfluss des Rad-Schiene-Kontakts auf Dynamik und Verschleiß eines Radsatzes. Universität Stuttgart, 1999. – DFG Zwischenbericht
- [Möh93] MÖHLER, P.: Lokale Kraft- und Bewegungsgrößen in der Berührungsfläche zwischen Kunststoffrad und Stahlfahrbahn. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1993. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [Mic99] MICHEL, R.: *Modellierung des Verhaltens von Papier und Gummituch im Druckspalt von Offsetdruckmaschinen*, TU Chemnitz, Dissertation, 1999
- [MP02] MAGNUS, K. ; POPP, K.: *Schwingungen*. Bd. 6. Aufl. Teubner-Verlag, 2002
- [NZJ00] NACKENHORST, U. ; ZASTRAU, B.W. ; JAREWSKI, J.: Finite Element Modeling of 3D Elastic-Elastic Rolling Contact. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* 80 (2000), S. 57–S60

- [Ra76] R.C., Batra ; AL. et: Rubber Covered Rolls - The Thermoviscoelastic Problem. A Finite Element Solution. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.10 (1976), S. 767–785
- [Rau99] RAUSCHER, T.: *Modellierung des reibungsbehafteten Rollkontakts elastoplastischer metallischer Festkörper*, Universität Dortmund, Dissertation, 1999
- [Sch99] SCHIRMER, W.: Diagnose und Verminderung der Polygonbildung an einem Walzenbrecher, eine Fallstudie, 1999 (VDI Berichte), S. 123–129
- [Tro00] TROMP, S.: Experimentelle Untersuchungen zur mechanischen und thermischen Beanspruchung rollender Kunststoffräder. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 2000. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [Wa99] WIMMEL, R. ; AL. et: Vorrichtung zur aktiven Unterdrückung von Kontaktschwingungen an einer Walzenanordnung. In: *Patentschrift* DE 198 21 854 C1 (1999)
- [Wal95] WALDECK, D.: Selbsterregte Schwingungen gekoppelter Rotoren. In: IRRETIER/NORDMANN/SPRINGER (Hrsg.): *Schwingungen in rotierenden Maschinen III*. Braunschweig : Vieweg Verlag, 1995, S. 306–314
- [WK88] WANG, G. ; KNOTHE, K.: Theorie und numerische Behandlung des allgemeinen rollenden Kontaktes zweier viskoelastischer Walzen. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1988. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht
- [Yin96] YIN, X.: Experimentelle Untersuchungen des instationären Rollkontakts zwischen Rad und Fahrbahn. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1996. (Fortschritt-Berichte VDI). – Forschungsbericht

Abbildungsverzeichnis

2.1	Koordinaten und Bezeichnungen am starren Rotor	18
2.2	Bezugslage (links) und ausgelenkte Lage (rechts) mit Kontaktkoordinaten der radial gekoppelten Rotoren	32
2.3	Komponenten der Kontaktspannungen an der unverformbaren Walze in Kontaktrichtung und in Umlaufrichtung	33
2.4	Komponenten der Kontaktspannungen an der verformbaren Walze in Kon- taktrichtung und in Umlaufrichtung	34
2.5	Kontaktkinematik (vereinfacht)	39
2.6	Kontaktkinematik (linearisiert)	42
2.7	Verallgemeinertes Maxwell-Modell zur Beschreibung viskoelastischen Ma- terialverhaltens	45
2.8	Wärmebilanz am umlaufenden Schichtelement (links) und am Kontakt- element (rechts)	49
3.1	Schema des Versuchsstands im Versuchsfeld des Fraunhofer Instituts Werk- zeugmaschinen und Umformtechnik in Chemnitz	56
3.2	Versuchsstand im Versuchsfeld des Fraunhofer Instituts Werkzeugmaschi- nen und Umformtechnik in Chemnitz	56
3.3	Statische Belastung des Walzenpaares - Kontakt-Kennline	58
3.4	Kontaktkraft bei Drehzahlhochlauf mit verspannten Lagern	59
3.5	Ergebnisse von Temperatur- und Durchmesser-messung beim stationären Rollen	60
3.6	Messstellen für die Modalanalyse an Gestell und Walzen sowie Anregungs- punkt (Hammerschlag)	61
3.7	Durchmesser- und Temperaturzunahme mit Welligkeiten nach 20 min Versuchsdauer	66
3.8	Entwicklung der Welligkeiten in den Versuchen gemäß Tabelle 3.7	68
3.9	Entwicklung der Lagerkraft in einem Versuch mit aufklingender Welligkeit	69

4.1	Minimalmodell des Walzenpaares	74
4.2	Berechnete Eigenfrequenzen des Versuchsstands in Abhängigkeit von den Betriebsparametern Antriebswinkelgeschwindigkeit Ω und Eindringtiefe v_0 (Vorspannung)	76
4.3	Restverformung und Relaxation (links) bzw. Temperatursprung und Abkühlung (rechts) eines Belagelements im Kontaktdurchlauf und freien Umlauf	78
4.4	Modelldarstellung des vereinfachten Systems zur Instabilität auf Grund regenerativer Effekte	79
4.5	Stabile Bereiche für die additive und die subtraktive Entwicklung einer Welligkeit	80
4.6	Stabile und instabile Bereiche für das (ungedämpfte) System mit regenerativer Änderung der Steifigkeit	83
4.7	Rotor mit geneigten Steifigkeitshauptachsen gegen Ebene	85
4.8	Stabile Parameterbereiche des Systems Rotor-Ebene mit geneigten Steifigkeitshauptachsen	87
4.9	Wicklermodell mit Kreiselwirkung, siehe [Wal95]	88
4.10	Stabile Parameterbereiche des Systems Rotor-Ebene mit Kreiselwirkung .	89
4.11	Stabilitätskarte für das Versuchsstandmodell bei regenerativer Wärmedehnung	91

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter eines elastisch gestützten Rotors	20
2.2	Modellgruppen zur Beschreibung des elastisch gestützten starren Rotors .	22
2.3	Defektparameter in Modellgruppe 1	24
2.4	Defektparameter in Modellgruppe 4	25
2.5	Defektparameter in Modellgruppe 2	26
2.6	Kontaktpartner im Modell gekoppelte Rotoren	29
2.7	Selbsterregungsmechanismen gekoppelter Rotoren	35
2.8	Grenzfälle der Belastung und Eigenschaften der viskoelastischen Grundkörper	44
3.1	Parameter der elastisch gestützten starren Rotoren	57
3.2	Gemessene Steifigkeiten der Lagerfedern	58
3.3	Ergebnis der experimentellen Modalanalyse am Versuchsstand bei nicht-drehenden und nicht gekoppelten Walzen.	62
3.4	Ergebnis der Modalanalyse der unbeschichteten Walze	63
3.5	Ergebnis der Modalanalyse des Gestells	64
3.6	Ergebnis der Modalanalyse der gekoppelten und rotierenden Walzen . . .	65
3.7	Experimentell bestätigte aufklingende Welligkeiten	67
4.1	Abschätzungen der Eigenfrequenzen	77

Anhang

Transformation des Trägheitstensors in das raumfeste Koordinatensystem

Es gilt die Eulersche Kreiselgleichung in körperfesten Koordinaten

$$\bar{\mathbf{M}}^S = \bar{\mathbf{J}}^S \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \tilde{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \bar{\mathbf{J}}^S \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (1)$$

Es erfolgt die Transformation in ein raumfestes Koordinatensystem mit der Transformationsmatrix \mathbf{A} :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (2)$$

mit der Matrix \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\sin(\Omega t) & 0 \\ \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

für die gilt:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad (4)$$

Der Drehgeschwindigkeitsvektor wird so vom mitrotierenden in das raumfeste Koordinatensystem transformiert. Es gilt

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega} \quad (5)$$

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = \mathbf{A}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{A} \quad (6)$$

Für die Winkelbeschleunigungen gilt die Beziehung:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{A} \bar{\boldsymbol{\omega}})^\cdot = \dot{\mathbf{A}} \bar{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{A} \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} \quad (7)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}} = \mathbf{A}^T \dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^T \bar{\boldsymbol{\omega}} \quad (8)$$

Der Drehmomentenvektor wird ebenfalls transformiert, es gilt

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{M}} \quad (9)$$

$$(10)$$

Durch Einsetzen und Multiplikation von links mit der Transformationsmatrix erhält man:

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{J}}^S(\mathbf{A}^T\dot{\omega}) - \mathbf{A}\bar{\mathbf{J}}^S(\mathbf{A}^T\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\omega) + \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\tilde{\omega}\mathbf{A})\bar{\mathbf{J}}^S(\mathbf{A}^T\omega) \quad (11)$$

Durch umordnen der Terme erhält man die transformierte Bewegungsgleichung in raumfesten Koordinaten:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}\bar{\mathbf{J}}^S\mathbf{A}^T)\dot{\omega} - (\mathbf{A}\bar{\mathbf{J}}^S\mathbf{A}^T)(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\omega) + \tilde{\omega}(\mathbf{A}\bar{\mathbf{J}}^S\mathbf{A}^T)\omega \quad (12)$$

Die Massenmatrix bezüglich der raumfesten Koordinaten kann demnach geschrieben werden

$$\mathbf{J}^S = \mathbf{A}\bar{\mathbf{J}}^S\mathbf{A}^T \quad (13)$$

mit

$$\bar{\mathbf{J}}^S = J_a \begin{pmatrix} 1 + \alpha_8 & 0 & -\alpha_9 \\ 0 & 1 - \alpha_8 & 0 \\ -\alpha_9 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix} \quad (14)$$

folgt daraus

$$\mathbf{J}^S = J_a \begin{pmatrix} 1 + \alpha_8 \cos(2\Omega t) & \alpha_8 \sin(2\Omega t) & 0 \\ \alpha_8 \sin(2\Omega t) & 1 - \alpha_8 \cos(2\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_7 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Die Bewegung des Rotors wird zusammengesetzt aus der *großen* Drehung Ωt um seine Drehachse und *kleine* Schwingungen um diese Bewegung mit den kleinen Winkeln $\varphi_x \ll 1$, $\varphi_y \ll 1$, $\varphi_z \ll 1$. Ebenso wird auch der Vektor der Winkelgeschwindigkeiten zerlegt:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (16)$$

Das Ausmultiplizieren unter Berücksichtigung lediglich der linearen Glieder liefert weitere geschwindigkeitsabhängigen Terme sowie zusätzliche Momente der dynamischen

Unwucht

$$-\mathbf{J}^S(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\boldsymbol{\omega}) = J_a\Omega \begin{pmatrix} -\alpha_8 \sin(2\Omega t) & 1 + \alpha_8 \cos(2\Omega t) & 0 \\ -1 + \alpha_8 \cos(2\Omega t) & \alpha_8 \sin(2\Omega t) & 0 \\ \alpha_9 \sin(\Omega t) & -\alpha_9 \cos(\Omega t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (17)$$

sowie zusätzliche Momente der dynamischen Unwucht

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}\mathbf{J}^S\boldsymbol{\omega} = J_a\Omega \begin{pmatrix} -\alpha_8 \sin(2\Omega t) & -1 + \alpha_8 \cos(2\Omega t) + \alpha_7 & 2\alpha_9 \sin(\Omega t) \\ 1 + \alpha_8 \cos(2\Omega t) - \alpha_7 & \alpha_8 \sin(2\Omega t) & -2\alpha_9 \cos(\Omega t) \\ -\alpha_9 \sin(\Omega t) & \alpha_9 \cos(\Omega t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ + \Omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_9 \sin(\Omega t) \\ -\alpha_9 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

Alle Ausdrücke zusammengefasst zeigen das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}\mathbf{J}^S\boldsymbol{\omega} = J_a\Omega \begin{pmatrix} -2\alpha_8 \sin(2\Omega t) & 2\alpha_8 \cos(2\Omega t) + \alpha_7 & 2\alpha_9 \sin(\Omega t) \\ 2\alpha_8 \cos(2\Omega t) - \alpha_7 & \alpha_8 \sin(2\Omega t) & -2\alpha_9 \cos(\Omega t) \\ -\alpha_9 \sin(\Omega t) & \alpha_9 \cos(\Omega t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \\ + \Omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_9 \sin(\Omega t) \\ -\alpha_9 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Lebenslauf

Jörg Weiß

geboren am 14.11.1971 in Chemnitz

- | | |
|-------------------|---|
| 10/1991 - 12/1996 | Studium im Studiengang Maschinenbau an der TU Chemnitz,
Fachrichtung Angewandte Mechanik |
| 08/1993 | Vordiplom , Gesamturteil: gut |
| 10/1994 - 02/1995 | Ingenieurpraktikum bei Volkswagen AG, Wolfsburg |
| 12/1996 | Abschluss als Diplom-Ingenieur, Gesamtprädikat: mit Auszeichnung,
Notendurchschnitt: 1,23 |
| 01/1997-03/1997 | Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl
Maschinendynamik/ Schwingungslehre
bzw. Getriebetechnik der TU Chemnitz |
| 04/1997-12/1997 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl
Maschinendynamik/ Schwingungslehre
bzw. Getriebetechnik der TU Chemnitz |
| 01/1998-05/2002 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl
Maschinendynamik/ Schwingungslehre der TU Chemnitz |
| 06/2002-01/2006 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fraunhofer Institut
Werkzeugmaschinen und Umformtechnik in Chemnitz |
| seit 02/2006 | Applikations Ingenieur bei der ITI GmbH in Dresden |